

Zu den Schnittsätzen von
Michael und Kuratowski & Ryll-Nardzewski

von
Gerhard Mägerl
aus Passau



Digitized by the Internet Archive
in 2026

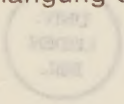
https://archive.org/details/IA41548423_0023

Zu den Schnittsätzen von
Michael und Kuratowski & Ryll-Nardzewski

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt von
Gerhard Mägerl
aus Passau

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1977

Vorsitzender der Promotionskommission:	Professor Dr. E. Schweizer
Erstberichterstatte:	Professor Dr. D. Kölzow
Zweitberichterstatte:	Professor Dr. H. Bauer



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i - iv
§ 0 : Definitionen und Bezeichnungen	1 - 5
§ 1 : Ein abstrakter Schnittsatz	6 - 18
§ 2 : Zur simultanen Fortsetzung stetiger Abbildungen	19 - 26
§ 3 : Zur Metrisierbarkeitsvoraussetzung an den Bildbereich im Satz von Michael	27 - 38
Anhang : Anwendungen des Satzes von Kuratowski & Ryll-Nardzewski	39 - 43
Literaturverzeichnis	44 - 46
Lebenslauf	

Einleitung

Sind X und Y Mengen und Φ eine Teilmenge von $X \times Y$, sodaß die Menge $\Phi(x) = \{y \in Y: (x, y) \in \Phi\}$ für jedes $x \in X$ nicht leer ist, so besagt das Auswahlaxiom, daß eine Abbildung f von X in Y existiert, die $f(x) \in \Phi(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt. Ein derartiges Φ wird eine Korrespondenz zwischen X und Y genannt und f heißt ein Schnitt zu Φ . Das Auswahlaxiom ist also gleichbedeutend mit der Aussage, daß jede Korrespondenz einen Schnitt besitzt.

Sind X und Y außerdem topologische oder meßbare Räume, so entsteht die Frage, welche Bedingungen an X , Y und Φ die Existenz eines stetigen oder meßbaren Schnittes implizieren. Zu den wichtigsten Resultaten im Zusammenhang mit dieser Fragestellung gehören der Satz von Michael [26] über die Existenz stetiger Schnitte und der Satz von Kuratowski & Ryll-Nardzeski [16] über die Existenz meßbarer Schnitte. Der letztgenannte Satz kann dazu benutzt werden, das klassische v. Neumannsche Measurable Choice Theorem herzuleiten.

Im ersten Paragraphen der Arbeit wird ein abstrakter Satzsatz bewiesen, der die beiden genannten Sätze als Spezialfälle enthält. Da sich die Stetigkeit von Abbildungen und die Unterhalbstetigkeit von Korrespondenzen auch als Meßbarkeit bezüglich gewisser Mengensysteme, die hier Pflasterungen genannt werden, interpretieren lassen, wird dieser Satz als Existenzaussage für meßbare Schnitte zu meßbaren Korrespondenzen zwischen einem gepflasterten Raum $(X, \mathcal{A})$ und einem topologischen Raum formuliert. Für gepflasterte Räume läßt sich ein von zwei Kardinalzahlen k und α abhängiger Parakompaktheitsbegriff definieren, die (k, α) -Parakompaktheit. Dabei ist k eine strikte obere Schranke für die Mächtigkeit der betrachteten Überdeckungen und α eine obere Schranke für die Dimension des Nerven der zugelassenen Verfeinerungen.

Die (k, α) -Parakompaktheit erscheint im abstrakten Satz als Bedingung an den Definitionsbereich der Korrespondenz. Dieselben Kardinalzahlen k und α schaffen die Verbindung zwischen Definitions- und Bildbereich, dadurch daß

an k eine Beschränktheitsbedingung für den uniformen Bildbereich, die sogenannte k -Beschränktheit, und an α eine Konvexitätsbedingung für einen auf dem Bildbereich definierten Hüllenoperator δ , die sogenannte α -Konvexität, geknüpft ist. Eine letzte Bedingung an den Bildbereich ist die der gleichmäßigen δ -Konvexität, die beinhaltet, daß die uniforme Struktur des Bildbereiches und der Hüllenoperator δ miteinander verträglich sind.

Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen läßt sich dann der abstrakte Schnittsatz wie folgt aussprechen :

Sei k eine Kardinalzahl und $\alpha \in \{0, 1, \dots, \omega\}$.

(X, α) sei ein (k, α) -parakompakter gepflasterter Raum, Y ein k -beschränkter uniformer Raum und δ ein α -konvexer Hüllenoperator auf Y , sodaß Y gleichmäßig δ -konvex ist.

Dann hat jede α -meßbare Korrespondenz Φ zwischen X und Y , die $\Phi(x) = \overline{\delta(\Phi(x))}$ für alle $x \in X$ erfüllt, einen α -meßbaren Schnitt.

Als Spezialfälle erhält man aus diesem Satz außer den Sätzen von Michael und Kuratowski & Ryll-Nardzewski einen Schnittsatz von Bauer und Bear, sowie einige weitere Resultate, die größtenteils auf Michael zurückgehen.

Der zweite Paragraph befaßt sich mit der simultanen Fortsetzung stetiger Abbildungen. Zunächst wird gezeigt, daß der folgende Spezialfall des Satzes von Borsuk - Dugundji - Michael ⁺⁾ über lineare simultane Fortsetzungen auch mit Hilfe des Michaelschen Schnittsatzes bewiesen werden kann :

Ist X ein normaler Raum, A eine kompakte metrisierbare Teilmenge von X und Y ein separabler Fréchet-Raum, so existiert eine lineare Abbildung $T : C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ mit folgenden Eigenschaften :

T ist stetig bezüglich der Topologien der gleichmäßigen Konvergenz auf $C(A, Y)$ und $C(X, Y)$.

Für jedes $f \in C(A, Y)$ gilt $Tf|_A = f$ und $f(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}$.

⁺⁾ Dieser Satz wird in seiner vollen Allgemeinheit auf Seite 21 wiedergegeben. Für den Spezialfall, daß A kompakt metrisch ist, wird dort nur die vollständige Regularität von X und die Lokalkonvexität von Y benötigt.

Anschließend wird die Frage behandelt, inwieweit bei Verzicht auf die Metrisierbarkeitsvoraussetzung noch die Existenz einer stetigen simultanen Fortsetzung gezeigt werden kann. Hierzu wird der folgende Satz bewiesen :

Ist X ein parakompakter Raum, A eine abgeschlossene Teilmenge von X und Y ein Fréchet-Raum, so existiert eine stetige Abbildung $T : C(A, Y) \longrightarrow C(X, Y)$ mit folgenden Eigenschaften :

T ist stetig bezüglich der Topologien der gleichmäßigen Konvergenz auf $C(A, Y)$ und $C(X, Y)$.

Für jedes $f \in C(A, Y)$ gilt $Tf|_A = f$ und $Tf(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}$.

Dieses Resultat beruht auf einer Ergänzung des Michaelschen Satzes, welche besagt, daß die stetigen Schnitte bezüglich einer geeigneten Topologie auf der Menge der Korrespondenzen stetig ausgewählt werden können. Im Beweis dieser Ergänzung wird der Michaelsche Satz zweimal angewandt.

Im dritten Paragraphen wird die Metrisierbarkeitsvoraussetzung an den Bildbereich im Satz von Michael untersucht. Aus Gegenbeispielen von Corson und Lindenstrauss [8] und von v. Weizsäcker [35] ist bekannt, daß diese Voraussetzung wesentlich ist. Hier wird gezeigt, daß im Falle eines schwachen lokal-konvexen Bildbereiches dessen Metrisierbarkeit für die Gültigkeit einer hinsichtlich des Definitionsbereiches und der Korrespondenz universellen Schnittaussage sogar notwendig ist. Es gilt nämlich :

Für einen schwachen lokalkonvexen Raum Y sind äquivalent :

- (i) Für jeden kompakten Raum X und jede nach unten halbstetige punktabgeschlossene, punktkonvexe Korrespondenz zwischen X und der Vervollständigung von Y existiert ein stetiger Schnitt.
- (ii) Y ist metrisierbar.

Aus dem Beweis dieses Satzes ergibt sich außerdem, daß ein Banach-Raum mit der schwachen Topologie oder ein dualer Banach-Raum mit der schwach*-Topologie die unter (i) beschriebene Eigenschaft genau dann hat, wenn er endlichdimensional ist.

In einem Anhang wird über einige weitere Resultate berichtet, die mit dem Schnittsatz von Kuratowski & Ryll-Nardzewski in Zusammenhang stehen. Zunächst wird gezeigt, daß aus diesem Satz ein bekannter Existenzsatz für universell meßbare Schnitte zu analytischen Korrespondenzen abgeleitet werden kann. Dieser Schnittsatz kann dazu benutzt werden, eine Eindeutigkeitsaussage für Urbildmaße von Eisele [11] zu verallgemeinern (vergleiche J. Lehn u. Verf. [20]).

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow, danke ich für die Überlassung des Themas und für die zahlreichen Diskussionen, durch die er das Zustandekommen dieser Arbeit entscheidend förderte.

§ 0) Definitionen und Bezeichnungen

(0.0) Es bezeichnet:

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen
$\overline{\mathbb{N}}_0$	die Menge $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
$\mathbb{R}$	den Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	den Körper der komplexen Zahlen
$\aleph_0$	die erste unendliche Kardinalzahl
$\aleph_1$	die erste überabzählbare Kardinalzahl

(0.1) Seien X und Y Mengen, A eine Teilmenge von X und $x \in X$.

$\mathcal{P}(X)$ bezeichnet die Potenzmenge von X , $\text{card } X$ die Kardinalität von X .

Für $V \subseteq X \times Y$ seien:

$$V(A) := \{y \in Y : \exists a \in A : (a, y) \in V\}$$

$$V(x) := V(\{x\})$$

Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so bezeichnet f_A die Restriktion von f auf A .

Für eine Halbmetrik d auf X und eine positive reelle Zahl r seien:

$$d(x, A) := \inf \{d(x, y) : y \in A\}$$

$$K(A, r, d) := \{y \in X : d(y, A) < r\}$$

$$K(x, r, d) := K(\{x\}, r, d)$$

(0.2) Alle auftretenden topologischen Räume werden als Hausdorffsch vorausgesetzt.

Für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X bezeichnet $\overline{A}$ den Abschluß von A .

X heißt nulldimensional, falls X eine Basis aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen besitzt. X hat Überdeckungsdimension Null, falls jede endliche offene Überdeckung von X eine disjunkte offene Verfeinerung besitzt. (Ein normaler Raum ist nulldimensional genau dann, wenn er Überdeckungsdimension Null hat.)

Ein topologischer Raum X heißt parakompakt (bzw. abzählbar parakompakt) falls jede (bzw. jede abzählbare) offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

Sind X und Y topologische Räume, so bezeichnet $C(X, Y)$ die Menge der stetigen Abbildungen von X in Y .

(0.3) Alle auftretenden Vektorräume sind Vektorräume über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Für eine Teilmenge A eines Vektorraumes bezeichnet $\text{conv } A$ die konvexe Hülle von A und $\text{extr } A$ die Menge der Extrempunkte von A .

Ist X ein Vektorraum und F eine Menge von Linearformen auf X , welche die Punkte von X trennt, so bezeichnet $\delta(X, F)$ die von F erzeugte - lokalkonvexe - initiale Topologie auf X . Ein lokalkonvexer Raum E heißt ein schwacher lokalkonvexer Raum, falls seine Topologie von der Form $\delta(X, F)$ ist.

Ist A eine konvexe Teilmenge eines Vektorraums und d eine Halbmetrik auf A , so heißt d nach [2] eine konvexe Halbmetrik, falls die Abbildung $(\lambda, x, y) \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y$ von $[0, 1] \times A \times A$ in A stetig bezüglich d ist, und für jede konvexe Teilmenge B von A und jedes $r > 0$ auch $K(B, r, d)$ konvex ist.

Ist $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, so bezeichnet $(\widehat{E}, \widehat{\mathcal{T}})$ die Vervollständigung von $(E, \mathcal{T})$.

(0.4) Sei X eine Menge, Y ein uniformer Raum und $\mathcal{F} \subseteq Y^X$.

Die Mengen der Form $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : \forall x \in X: (f(x), g(x)) \in V\}$ bilden eine Basis der uniformen Struktur der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{F}$, wenn V eine Nachbarschaftsbasis der Uniformität von Y durchläuft. Der so definierte uniforme Raum wird mit $\mathcal{F}_u$ bezeichnet. Dieser Raum ist metrisierbar, wenn Y metrisierbar ist.

Ist X ein topologischer Raum, so ist $C_u(X, Y)$ metrisierbar, wenn Y metrisierbar ist, und vollständig, wenn Y vollständig ist. Insbesondere ist daher $C_u(X, Y)$ ein Fréchet-Raum, wenn Y ein Fréchet-Raum ist.

(0.5) Sei X eine Teilmenge eines reellen Vektorraumes E und $\mathcal{X}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(E)$. Das Paar $(X, \mathcal{X})$ heißt ein (geometrischer) Simplicialkomplex, wenn gilt :

Jedes $S \in \mathcal{X}$ ist ein endlichdimensionales Simplex.

Mit S gehört auch jede Seite von S zu $\mathcal{X}$.

Sind S und S' aus $\mathcal{X}$, so ist $S \cap S'$ entweder leer, oder eine Seite von S und S' .

$$\bigcup \{S : S \in \mathcal{X}\} = X.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt $\text{Ger}_n(X, \mathcal{X}) := \bigcup \{S \in \mathcal{X} : \dim S \leq n\}$ das n -dimensionale Gerüst von $(X, \mathcal{X})$.

$\dim(X, \mathcal{X}) := \sup \{\dim S : S \in \mathcal{X}\}$ heißt die Dimension von $(X, \mathcal{X})$.

Für $x \in X$ sei $S(x)$ das Simplex kleinster Dimension in $\mathcal{X}$, der x enthält.

Für $x \in \text{Ger}_0(X, \mathcal{X})$ sei $\text{St}(x) := \{y \in X : x \in S(y)\}$ der Stern von x .

Ist $(X, \mathcal{X})$ ein Simplicialkomplex, so heißt die feinste Topologie auf X , die auf allen $S \in \mathcal{X}$ die euklidische Topologie induziert, die Whitehead-Topologie.

Der zugehörige topologische Raum wird mit $|X, \mathcal{X}|$ bezeichnet, und $\dim |X, \mathcal{X}|$ gleich $\dim(X, \mathcal{X})$ gesetzt.

Jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ einer Menge M ist ein Simplicialkomplex in folgender Weise zugeordnet:

Für $U \in \mathcal{U}$ sei $e_U \in \mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ definiert durch $e_U(V) = 0$, für $V \neq U$ und $e_U(U) = 1$.

Sei $\mathcal{X}(\mathcal{U}) := \{\text{conv} \{e_V : V \in \mathcal{U}'\} : \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} \text{ endlich, } \bigcap \{V : V \in \mathcal{U}'\} \neq \emptyset\}$

und $X(\mathcal{U}) := \bigcup \{S : S \in \mathcal{X}(\mathcal{U})\}$. $(X(\mathcal{U}), \mathcal{X}(\mathcal{U}))$ ist dann ein Simplicialkomplex. $N(\mathcal{U}) := |X(\mathcal{U}), \mathcal{X}(\mathcal{U})|$ heißt (geometrischer) Nerv von $\mathcal{U}$.

(0.6) Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}(X)$ heißt eine Pflasterung und $(X, \mathcal{A})$ ein gepflasterter Raum, falls gilt:

$\mathcal{A}$ enthält X und die leere Menge.

Die Vereinigung einer Folge von Mengen aus $\mathcal{A}$ gehört zu $\mathcal{A}$.

Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{A}$ gehört zu $\mathcal{A}$.

(z.B. ist jede σ -Algebra und jede Topologie eine Pflasterung)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein gepflasterter Raum und f eine Abbildung von X in einen topologischen Raum Y . f heißt $\mathcal{A}$ -meßbar, wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für jede offene Teilmenge O von Y gilt. (Ist Y metrisierbar und gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für jede

abgeschlossene Teilmenge A von Y , so ist f $\mathcal{A}$ -meßbar, da jede offene Teilmenge von Y Vereinigung einer Folge von abgeschlossenen Mengen ist, und da $\mathcal{A}$ stabil gegen die Bildung von abzählbaren Vereinigungen ist.)

(0.7) Eine Korrespondenz Φ zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Teilmenge Φ von $X \times Y$, sodaß $\Phi(x) = \{y \in Y : (x, y) \in \Phi\}$ für jedes x aus X nicht leer ist.

Jede Korrespondenz zwischen X und Y läßt sich mit einer Abbildung von X in das System der nicht-leeren Teilmengen von Y identifizieren. Aus diesem Grund werden Korrespondenzen in der Literatur auch häufig als "mengenwertige Abbildungen" (set-valued maps) oder "mehrwertige Abbildungen" (many-valued maps) bezeichnet.

Unter Mißbrauch der üblichen Notation wird im folgenden anstelle von " Φ ist eine Korrespondenz zwischen X und Y " häufig auch " $\Phi: X \rightarrow Y$ ist eine Korrespondenz" oder " $x \mapsto \Phi(x)$ ist eine Korrespondenz" geschrieben. Unklarheiten können durch diese Schreibweise jedoch nicht entstehen, da in jedem Fall erwähnt wird, ob eine Abbildung oder eine Korrespondenz vorliegt.

Ist $\Phi: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz und A eine Teilmenge von Y , so heißt $\Phi^{-1}(A) := \{x \in X : \Phi(x) \cap A \neq \emptyset\}$ das Urbild von A unter Φ .

Ist $\Phi: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so heißt f ein Schnitt zu Φ , falls $f(x) \in \Phi(x)$ für alle x in X gilt.

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein gepflasterter Raum, Y ein topologischer Raum und Φ eine Korrespondenz zwischen X und Y , so heißt Φ eine $\mathcal{A}$ -meßbare Korrespondenz, falls $\Phi^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Teilmengen O von Y gilt. (Ist Y metrisierbar und gilt $\Phi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für alle abgeschlossenen Teilmengen A von Y , so ist Φ $\mathcal{A}$ -meßbar, da $\Phi^{-1}(\bigcup \{F : F \in \mathcal{F}\}) = \bigcup \{\Phi^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ für jede Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}(Y)$ gilt.) Ist $\mathcal{A}$ eine Topologie, so nennt man eine $\mathcal{A}$ -meßbare Korrespondenz nach unten halbstetig.

Eine Korrespondenz Φ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y ist offenbar genau dann nach unten halbstetig, wenn gilt:

Für jedes $x \in X$, jedes $y \in \Phi(x)$ und jede Umgebung V von y existiert eine Umgebung U von x , sodaß für alle $x' \in U$ gilt:

$$\Phi(x') \cap V \neq \emptyset.$$

Weiter zeigt man leicht, daß mit Φ auch $x \mapsto \overline{\Phi(x)}$ eine nach unten halbstetige Korrespondenz ist.

Eine Korrespondenz $\Phi: X \rightarrow Y$ heißt punktabgeschlossen, punktkonvex etc., falls für jedes $x \in X$ die Menge $\Phi(x)$ abgeschlossen, konvex, etc. ist, wobei vorausgesetzt wird, daß diese Aussagen sinnvoll sind.

(0.8) Da sich punktabgeschlossene Korrespondenzen zwischen einer Menge X und einem topologischen Raum Y als Abbildungen von X in die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von Y interpretieren lassen, ist es möglich, Räume derartiger Korrespondenzen mit einer Topologie zu versehen, falls es möglich ist, das System der abgeschlossenen Teilmengen von Y mit einer Topologie zu versehen. Letzteres geschieht in folgender Weise:
Sei Y ein uniformer Raum mit uniformer Struktur $\mathcal{A}_0$. $\mathcal{F}(Y)$ bezeichne das System der abgeschlossenen, nicht leeren Teilmengen von Y .

Für $V \in \mathcal{A}_0$ sei:

$$\hat{V} := \{(A, B) \in \mathcal{F}(Y) \times \mathcal{F}(Y) : A \subseteq V(B), B \subseteq V(A)\}$$

Dann ist $\{\hat{V} : V \in \mathcal{A}_0\}$ Basis einer uniformen Struktur auf $\mathcal{F}(Y)$ (vgl. [4], Ch. II, p. 34, ex. 5), die metrisierbar ist, wenn Y metrisierbar ist (vgl. [24], Prop. 4.1).

Ist nun $\mathcal{K}$ die Menge der punktabgeschlossenen Korrespondenzen zwischen einer Menge X und einem uniformen Raum Y , so läßt sich $\mathcal{K}$ als eine Teilmenge von $(\mathcal{F}(Y))^X$ auffassen, und kann somit mit der uniformen Struktur der gleichmäßigen Konvergenz versehen werden (vgl. (0.4)). Der zugehörige uniforme Raum wird mit $\mathcal{K}_U$ bezeichnet.

Insbesondere ist $\mathcal{K}'_U$ metrisierbar, wenn Y metrisierbar ist.

Alle weiteren Begriffe, sofern sie nicht bisher erläutert wurden oder im Verlauf der Arbeit definiert werden, finden sich in Bourbaki [4], [5], Dugundji [10] und Schaefer [32].

§ 1) Ein abstrakter Schnitzsatz

Ziel dieses Paragraphen ist es, einen Existenzsatz für meßbare Schnitte zu meßbaren Korrespondenzen zwischen einem gepflasterten Raum und einem uniformen Raum zu beweisen. Als Spezialfälle dieses abstrakten Schnitzsatzes werden sich der Existenzsatz von Michael für stetige Schnitte und der Existenzsatz von Kuratowski & Ryll-Nardzewski für meßbare Schnitte ergeben. Als weitere Spezialfälle erhält man einen Satz von Bauer & Bear, sowie einige andere Resultate, die größtenteils auf Michael zurückgehen.

Zunächst wird ein von zwei Kardinalzahlen abhängiger Parakompaktheitsbegriff für gepflasterte Räume eingeführt, der dann in der Bedingung an den Definitionsbereich der Korrespondenz auftreten wird.

(1.1) Definition

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein gepflasterter Raum, k eine Kardinalzahl und $\alpha \in \overline{\mathbb{N}}_0$.

$(X, \mathcal{O})$ heißt (k, α) -parakompakt, falls gilt :

Für jede Überdeckung $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ von X mit $\text{card } \mathcal{B} < k$ existiert eine Verfeinerung $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{O}$ von $\mathcal{B}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\dim N(\mathcal{B}^*) \leq \alpha$.
- (ii) Es existiert eine $\mathcal{O}$ -meßbare Abbildung $\varphi : X \rightarrow N(\mathcal{B}^*)$ mit $\varphi^{-1}(\text{St } e_B) \subseteq B$ für alle $B \in \mathcal{B}^*$.

(1.2) Beispiele

- (i) Ein meßbarer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist $(\aleph_1, 0)$ -parakompakt.

Für die weiteren Beispiele sei X ein topologischer Raum und Θ die Pflasterung von X , die aus allen offenen Teilmengen von X besteht.

- (ii) Sei X parakompakt und k irgendeine Kardinalzahl:
 (X, Θ) ist (k, ∞) -parakompakt.

- (iii) Sei X normal und abzählbar parakompakt:
 $(X, \mathcal{O})$ ist $(\mathfrak{N}_1, \infty)$ -parakompakt.
- (iv) Sei X normal:
 $(X, \mathcal{O})$ ist $(\mathfrak{N}_0, \infty)$ -parakompakt.
- (v) Sei X Lindelöfisch und nulldimensional, k irgendeine Kardinalzahl:
 $(X, \mathcal{O})$ ist $(k, 0)$ -parakompakt.
- (vi) Sei X parakompakt und nulldimensional und k irgendeine Kardinalzahl:
 $(X, \mathcal{O})$ ist $(k, 0)$ -parakompakt.
- (vii) Sei X abzählbar parakompakt, normal und nulldimensional:
 $(X, \mathcal{O})$ ist $(\mathfrak{N}_1, 0)$ -parakompakt.
- (viii) X habe Überdeckungsdimension Null:
 $(X, \mathcal{O})$ ist $(\mathfrak{N}_0, 0)$ -parakompakt.

Beweis:

- (i) Sei $\mathcal{A} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}$ eine Überdeckung von X . Da $\mathcal{O}$ eine $\mathfrak{S}$ -Algebra ist, gibt es eine disjunkte Verfeinerung $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathcal{O}$ von $\mathcal{A}$, die abzählbar ist. $\varphi: X \rightarrow N(\mathfrak{B}^*)$ definiert durch $\varphi_B \equiv e_B$ für $B \in \mathfrak{B}^*$, und $\mathfrak{B}^*$ haben dann die gewünschten Eigenschaften.
- (ii) (vgl. [10], S. 172) Sei $\mathfrak{S}$ eine offene Überdeckung von X , $\mathfrak{B}^*$ eine lokalendliche offene Verfeinerung von $\mathfrak{S}$ und $\{\varphi_B : B \in \mathfrak{B}^*\}$ eine $\mathfrak{B}^*$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf X .
 $\mathfrak{B}^*$ und $\varphi: X \rightarrow N(\mathfrak{B}^*)$, definiert durch

$$\varphi(x) := \sum_{B \in \mathfrak{B}^*} \varphi_B(x) \cdot e_B \quad \text{für } x \in X$$
 haben dann die gewünschten Eigenschaften.
- (iii) Sei $\mathfrak{S}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X und $\mathfrak{B}^*$ eine lokalendliche offene Verfeinerung von $\mathfrak{S}$. Da X normal ist, ex. eine $\mathfrak{B}^*$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf X . Der Rest des Beweises verläuft dann wie unter (ii).
- (iv) Ausgehend von einer endlichen offenen Überdeckung verfährt man wie unter (ii) und (iii).

- (v) Sei $\mathfrak{B}$ eine offene Überdeckung von X . Da X nulldimensional ist, existiert eine Verfeinerung $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$, die aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen besteht. Da X Lindelöfisch ist, besitzt $\mathfrak{B}'$ eine abzählbare Teilüberdeckung $\mathfrak{B}''$. Diese besitzt schließlich eine abzählbare disjunkte offene Verfeinerung $\mathfrak{B}^*$, da die Mengen aus $\mathfrak{B}''$ zugleich offen und abgeschlossen waren. Der Rest des Beweises verläuft wie unter (i).
- (vi) Sei $\mathfrak{B}$ eine offene Überdeckung von X . Da X parakompakt und nulldimensional ist, existiert eine disjunkte offene Verfeinerung $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$. (vgl. [27], Prop. 2). $\mathfrak{B}^*$ und $\varphi: X \rightarrow N(\mathfrak{B}^*)$, definiert durch $\varphi_B \equiv e_B$ für $B \in \mathfrak{B}^*$ leisten dann das Verlangte.
- (vii) Ausgehend von einer abzählbaren offenen Überdeckung verfährt man wie unter (vi).
- (viii) Ausgehend von einer endlichen offenen Überdeckung verfährt man wie unter (vi) und (vii).

Die nun folgenden Definitionen dienen dazu, geeignete Bedingungen an den Bildbereich der Korrespondenz zu formulieren.

(1.3) Definition

- (a) Sei Y eine Menge. Eine Abbildung $\mathfrak{G}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ heißt ein Hüllenoperator auf Y , falls gilt:

$$A \subseteq \mathfrak{G}(A) = \mathfrak{G}(\mathfrak{G}(A)) \quad \text{für } A \subseteq Y$$

$$\mathfrak{G}(A) \subseteq \mathfrak{G}(B) \quad \text{für } A \subseteq B \subseteq Y$$

$$\mathfrak{G}(\{y\}) = \{y\} \quad \text{für } y \in Y$$

- (b) Sei $\mathfrak{G}$ ein Hüllenoperator auf einem topologischen Raum Y und $\alpha \in \overline{N}_0$. $\mathfrak{G}$ heißt α -konvex, falls gilt:

Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein Simplicialkomplex mit $\dim(X, \mathfrak{T}) \leq \alpha$

und $g: \text{Ger}_0(X, \mathfrak{T}) \rightarrow Y$ eine Abbildung, so existiert

eine stetige Abbildung $\tau: |X, \mathfrak{T}| \rightarrow Y$, sodaß

$$\tau(S) \subseteq \mathfrak{G}(g(\text{extr } S)) \quad \text{für jedes } S \in \mathfrak{T} \text{ gilt.}$$

(Insbesondere gilt dann $\tau(x) = g(x)$ für jedes

$$x \in \text{Ger}_0(X, \mathfrak{T}).$$

(1.4) Beispiele

- (i) Der triviale Hüllenoperator $\bar{} = \text{id}_{\mathcal{P}(Y)}$ auf einem topologischen Raum Y ist 0-konvex.
- (ii) Sei Y eine konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraumes und $\bar{}$ der konvexe Hüllenoperator $A \mapsto \text{conv } A$ auf Y .
 $\bar{}$ ist ∞ -konvex.
- (iii) Sei Y eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes, $\bar{}$ der konvexe Hüllenoperator auf Y und d eine konvexe Metrik auf Y . Dann ist $\bar{}$ ein ∞ -konvexer Hüllenoperator auf dem metrischen Raum (Y, d) .
- (iv) Ist $\bar{}$ ein Hüllenoperator auf einem topologischen Raum Y und hat $\bar{}(F)$ für jedes $F \subseteq Y$ die folgende Eigenschaft :
 Für jedes Simplex S mit $\dim S \leq \alpha \in \mathbb{N}_0$ (für jedes Simplex S)
 jede abgeschlossene Teilmenge A von S und jede stetige Abbildung $g : A \rightarrow \bar{}(F)$ existiert eine stetige Fortsetzung $h : S \rightarrow \bar{}(F)$ von g ,
 so ist $\bar{}$ ein α -konvexer (∞ -konvexer) Hüllenoperator auf Y .
 (Beispiele solcher Hüllenoperatoren finden sich bei Jamison [15])

Beweis:

- (i) - (iii) ist klar.
- (iv) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Simplicialkomplex mit $\dim(X, \mathcal{T}) \leq \alpha \in \mathbb{N}_0$.
 Sei $g : \text{Ger}_0(X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ gegeben. Für jedes 1-dimensionale Simplex $S_1 \in \mathcal{T}$ ex. eine stetige Abbildung $\tau_1 : S_1 \rightarrow \bar{}(g(\text{extr } S_1))$
 mit $\tau_1|_{\text{extr } S_1} = g|_{\text{extr } S_1}$. Dadurch wird eine Abbildung τ_1
 von $\text{Ger}_1(X, \mathcal{T})$ in Y definiert, die die gewünschten Eigenschaften besitzt. Nach endlich vielen Schritten erhält man die gewünschte Abbildung τ . (Die Stetigkeit von τ folgt aus der Definition der Whitehead-Topologie, daß τ wohldefiniert ist, ist offensichtlich)
 Für den Fall $\alpha = \infty$ verfährt man induktiv.

(1.5) Definition

Ist Y eine Menge, $\tilde{\sigma}$ ein Hüllenoperator auf Y und d eine Halbmetrik auf Y , so heißt d eine $\tilde{\sigma}$ -konvexe Halbmetrik, falls für jede Teilmenge A von Y und jede positive reelle Zahl r gilt:

$$\tilde{\sigma}(K(\tilde{\sigma}(A), r, d)) = K(\tilde{\sigma}(A), r, d).$$

Ist Y ein uniformer Raum und $\tilde{\sigma}$ ein Hüllenoperator auf Y , so heißt Y gleichmäßig $\tilde{\sigma}$ -konvex, falls die uniforme Struktur von Y durch eine Familie $\tilde{\sigma}$ -konvexer Halbmetriken erzeugt wird.

(1.6) Beispiele

- (i) Ist Y ein uniformer Raum und $\tilde{\sigma}$ der triviale Hüllenoperator auf Y , so ist Y gleichmäßig $\tilde{\sigma}$ -konvex.
- (ii) Eine konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes mit ihrer kanonischen uniformen Struktur ist bezüglich des konvexen Hüllenoperators $\tilde{\sigma}$ gleichmäßig $\tilde{\sigma}$ -konvex.
- (iii) Eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes versehen mit einer konvexen Metrik ist bezüglich des konvexen Hüllenoperators $\tilde{\sigma}$ gleichmäßig $\tilde{\sigma}$ -konvex.
- (iv) Einige der "aligned spaces" in [15] liefern Beispiele $\tilde{\sigma}$ -konvexer Räume. (z.B. das dort so genannte "krumm alignment" auf dem Einheitsquadrat.)

Den Zusammenhang zwischen Parakompaktheitseigenschaften gepflasterter Räume, Konvexitätseigenschaften von Hüllenoperatoren auf topologischen Räumen und Existenzaussagen für meßbare Schnitte stellt folgendes Lemma her.

(1.7) Lemma

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein (k, α) -parakompakter gepflasterter Raum und $\tilde{\sigma}$ ein α -konvexer Hüllenoperator auf einem topologischen Raum Y . Weiter sei Z eine Teilmenge von Y mit $\text{card } Z \leq k$ und $\{A_z : z \in Z\} \subseteq \mathcal{A}$ eine Überdeckung von X .

Dann existiert eine $\mathcal{A}$ -meßbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$, sodaß für alle $x \in X$ gilt : $f(x) \in \tilde{\sigma}(\{z \in Z : x \in A_z\})$.

Beweis

Da $(X, \mathcal{A})$ als (k, α) -parakompakt vorausgesetzt ist, existiert eine Verfeinerung $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}$ von $\{A_z : z \in Z\}$ mit $\dim N(\mathfrak{B}) \leq \alpha$ und eine $\mathcal{A}$ -meßbare Abbildung $\varphi : X \rightarrow N(\mathfrak{B})$, sodaß $\varphi^{-1}(\text{St } e_B) \subseteq B$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt.

Sei $v : \mathfrak{B} \rightarrow Z$ eine Verfeinerungsabbildung (d.h. $B \subseteq A_{v(B)}$ für $B \in \mathfrak{B}$). Definiert man $g : \text{Ger}_0(N(\mathfrak{B})) \rightarrow Y$ durch $g(e_B) := v(B)$ für $B \in \mathfrak{B}$, so existiert - da $\mathcal{G}$ ein α -konvexer Hüllenoperator ist - eine stetige Abbildung τ von $N(\mathfrak{B})$ in Y , sodaß

$$\tau(S) \subseteq \mathcal{G}(g(\text{extr } S)) = \mathcal{G}(\{v(B) : e_B \in S\})$$

für jedes Simplex $S \in N(\mathfrak{B})$ gilt.

$f := \tau \circ \varphi$ ist dann offensichtlich $\mathcal{A}$ -meßbar. Ist weiter $x \in X$ und

$S := S(\varphi(x))$ das Trägersimplex von $\varphi(x)$, so gilt $\varphi(x) \in \text{St } e_B$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ mit $e_B \in S$, d.h. $x \in B$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ mit $e_B \in S$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(x) = \tau(\varphi(x)) &\in \tau(S) \subseteq \mathcal{G}(\{v(B) : e_B \in S\}) \subseteq \mathcal{G}(\{v(B) : x \in B\}) \subseteq \\ &\subseteq \mathcal{G}(\{z \in Z : x \in A_z\}) \end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen.

Schließlich wird noch folgende Definition benötigt:

(1.8) Definition

Sei k eine Kardinalzahl. Ein uniformer Raum Y heißt k -beschränkt, falls es zu jeder Nachbarschaft V von Y eine Teilmenge Z von Y gibt, sodaß $\text{card } Z \leq k$ und $Y = \bigcup V(Z)$ gilt.

(1.9) Beispiele

- (i) Y ist totalbeschränkt (oder präkompakt), genau dann, wenn Y $\mathfrak{N}_0$ -beschränkt ist.
- (ii) Existiert eine dichte Teilmenge D von Z mit $\text{card } D \leq k$, so ist Y k -beschränkt.

Das nächste Lemma, das in entsprechender Form auch in den Beweisen der Schnittsätze von Michael und Kuratowski & Ryll-Nardzewski auftritt, enthält die Idee, eine Korrespondenz durch Abbildungen zu "approximieren" um durch Grenzübergang den gewünschten Schnitt zu erhalten.

(1.10) Lemma

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein (k, α) -parakompakter gepflasterter Raum, Y ein k -beschränkter uniformer Raum und $\mathcal{B}$ ein α -konvexer Hüllenoperator auf Y . d_1 und d_2 seien stetige Halbmetriken auf Y und r, ε positive reelle Zahlen.

Weiter sei $\Phi : X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{O}$ -meßbare Korrespondenz und $g : X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{O}$ -meßbare Abbildung, sodaß $d_1(g(x), \Phi(x)) < r$ für alle $x \in X$ gilt. Dann existiert eine $\mathcal{O}$ -meßbare Abbildung $h : X \rightarrow Y$, sodaß für alle $x \in X$ gilt :

$$h(x) \in \mathcal{B}(K(\Phi(x), \varepsilon, d_2)) \cap \mathcal{B}(K(g(x), r + \varepsilon, d_1))$$

Beweis:

Sei $d = \sup(d_1, d_2)$ eine weitere stetige Halbmetrik auf Y , und Z eine Teilmenge von Y mit $\text{card } Z < k$ und $\bigcup_{z \in Z} K(z, \varepsilon/2, d) = Y$.

Für $z \in Z$ seien: $C_z := \Phi^{-1}(K(z, \varepsilon, d_2)) \in \mathcal{O}$

$$D_z := g^{-1}(K(z, r + \varepsilon, d_1)) \in \mathcal{O}$$

$$A_z := C_z \cap D_z \in \mathcal{O}$$

Wir zeigen zunächst, daß $\{A_z : z \in Z\}$ eine Überdeckung von X ist.

Sei dazu $x \in X$. Wegen $d_1(g(x), \Phi(x)) < r$ existiert $y \in \Phi(x)$, sodaß $d_1(g(x), y) < r$ gilt.

$T := K(g(x), r, d_1) \cap K(y, \varepsilon/2, d_2)$ ist daher nicht leer, und daher ex. ein $z \in Z$ mit $K(z, \varepsilon/2, d) \cap T \neq \emptyset$.

Für $t \in K(z, \varepsilon/2, d) \cap T$ gilt dann :

$$d_1(g(x), z) \leq d_1(g(x), t) + d_1(t, z) \leq d_1(g(x), t) + d(t, z) < r + \varepsilon/2 < r + \varepsilon$$

$$d_2(y, z) \leq d_2(y, t) + d_2(t, z) \leq d_2(y, t) + d(t, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Zusammen ergibt dies:

$$x \in g^{-1}(K(z, r + \varepsilon, d_1)) = D_z$$

$$\Phi(x) \cap K(z, \varepsilon, d_2) \neq \emptyset, \text{ also } x \in C_z.$$

Nach Lemma (1.7) existiert nunmehr eine $\mathcal{A}$ -meßbare Abbildung h von X in Y , sodaß für alle $x \in X$ gilt:

$$h(x) \in \mathcal{B}(\{z \in Z : x \in A_z\})$$

Damit ergibt sich für jedes $x \in X$:

$$\begin{aligned} h(x) \in \mathcal{B}(\{z \in Z : x \in A_z\}) &\subseteq \mathcal{B}(\{z \in Z : x \in C_z\}) \cap \mathcal{B}(\{z \in Z : x \in D_z\}) = \\ &= \mathcal{B}(\{z \in Z : \Phi(x) \cap K(z, \varepsilon, d_2) \neq \emptyset\}) \cap \mathcal{B}(\{z \in Z : d_1(g(x), z) < r + \varepsilon\}) \\ &= \mathcal{B}(\{z \in Z : d_2(z, \Phi(x)) < \varepsilon\}) \cap \mathcal{B}(\{z \in Z : d_1(g(x), z) < r + \varepsilon\}) \\ &\subseteq \mathcal{B}(K(\Phi(x), \varepsilon, d_2)) \cap \mathcal{B}(K(g(x), r + \varepsilon, d_1)) \end{aligned}$$

und das Lemma ist vollständig bewiesen.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun der angekündigte abstrakte Schnittsatz bewiesen werden:

(1.11) Satz

Sei k eine Kardinalzahl und $\alpha \in \overline{\mathbb{N}}_0$.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein (k, α) -parakompakter gepflasterter Raum.

Y sei ein vollständig metrisierbarer, k -beschränkter uniformer Raum.

$\mathcal{B}$ sei ein α -konvexer Hüllenoperator auf Y und Y sei gleichmäßig $\mathcal{B}$ -konvex.

Ist dann Φ eine $\mathcal{A}$ -meßbare, punktabgeschlossene Korrespondenz zwischen X und Y , sodaß $\Phi(x) = \mathcal{B}(\Phi(x))$ für alle $x \in X$ gilt, so besitzt Φ einen $\mathcal{A}$ -meßbaren Schnitt.

Beweis:

Man kann annehmen, daß die uniforme Struktur von Y durch eine Folge

$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{B}$ -konvexen Halbmetriken erzeugt wird, sodaß

$d_n \geq 2 \cdot d_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Mit Hilfe von Lemma (1.10) wird dann eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}$ -meßbaren Abbildungen $f_n: X \rightarrow Y$ konstruiert, sodaß für all $n \geq 2$ gilt:

- (i) $d_n(f_n(x), \Phi(x)) < 1/2^n$ für alle $x \in X$.
- (ii) $d_{n-1}(f_n(x), f_{n-1}(x)) < 1/2^{n-2}$ für alle $x \in X$.

Da $d_n \geq 2 d_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aus (ii), daß (f_n) eine Cauchy-Folge bezüglich der uniformen Struktur der gleichmäßigen Konvergenz auf Y^X ist, und daher wegen der Vollständigkeit von Y gleichmäßig gegen eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ konvergiert. Aus (i) folgt, daß $f(x) \in \overline{\Phi(x)} = \Phi(x)$ für alle $x \in X$ gilt, d.h. daß f ein Schnitt zu Φ ist. Die $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit von f ergibt sich aus der $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit der f_n , der gleichmäßigen Konvergenz der f_n gegen f , der Metrisierbarkeit von Y und der Abgeschlossenheit von $\mathcal{O}$ gegen die Bildung abzählbarer Vereinigungen. (Man vergleiche hierzu z.B. das Lemma in [16])

Konstruktion der Folge (f_n) :

Sei o.B.d.A. die Halbmetrik d_1 durch $1/4$ beschränkt und f_1 eine konstante Abbildung von X in Y . f_1 ist dann $\mathcal{O}$ -meßbar, da die leere Menge und X zu $\mathcal{O}$ gehören.

Da $d_1(f_1(x), \Phi(x)) < 1/2$ für alle $x \in X$ gilt, existiert nach (1.10) eine $\mathcal{O}$ -meßbare Abbildung f_2 von X in Y mit:

$$f_2(x) \in \mathcal{B}(K(\Phi(x), 1/4, d_2)) \cap \mathcal{B}(K(f_1(x), 1/2 + 1/4, d_1))$$

Da d_1 und d_2 nach Voraussetzung $\mathcal{B}$ -konvex sind, folgt daraus :

$$\begin{aligned} d_2(f_2(x), \Phi(x)) &< 1/4 \\ d_1(f_1(x), f_2(x)) &< 1 \end{aligned} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Ist $n \geq 2$, und sind $f_1, \dots, f_{n-1}$ mit (i) und (ii) bereits konstruiert, so existiert wegen (i) gemäß Lemma (1.10) eine $\mathcal{O}$ -meßbare Abbildung f_n von X in Y mit :

$$f_n(x) \in \mathcal{B}(K(\Phi(x), 1/2^n, d_n)) \cap \mathcal{B}(K(f_{n-1}(x), 1/2^{n-1} + 1/2^{n-1}, d_{n-1}))$$

Da d_{n-1} und d_n nach Voraussetzung $\mathcal{B}$ -konvex sind, folgt daraus :

$$\begin{aligned} d_n(f_n(x), \Phi(x)) &< 1/2^n \\ d_{n-1}(f_{n-1}(x), f_n(x)) &< 1/2^{n-2} \end{aligned} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Man erhält die gewünschte Folge somit durch vollständige Induktion, und der Satz ist vollständig bewiesen.

(1.12) Spezialfälle

(1) MICHAEL (1956)

Sei X ein parakompakter topologischer Raum und Y eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes E .
 Φ sei eine nach unten halbstetige, punktabgeschlossene und punktkonvexe Korrespondenz zwischen X und Y .

Hinreichend für die Existenz eines stetigen Schnittes zu Φ ist dann jede der folgenden Bedingungen:

- (a) E ist ein Frechet-Raum
- (b) Die kanonische uniforme Struktur von Y ist vollständig und metrisierbar
- (c) E ist metrisierbar und Φ ist punktvollständig.

(2) BAUER & BEAR (1969)

Sei X ein parakompakter topologischer Raum und Y eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes E , die durch eine konvexe Metrik d vollständig metrisiert wird.

Dann hat jede nach unten halbstetige Korrespondenz $\Phi: X \rightarrow Y$, die punktabgeschlossen und punktkonvex ist, einen stetigen Schnitt.

(3) KURATOWSKI & RYLL-NARDZEWSKI (1965)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und Y ein Polnischer Raum.

Dann hat jede $\mathcal{A}$ -meßbare, punktabgeschlossene Korrespondenz $\Phi: X \rightarrow Y$ einen $\mathcal{A}$ -meßbaren Schnitt.

Insbesondere hat jede Korrespondenz $\Phi: X \rightarrow Y$, die $\Phi^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ für jede abgeschlossene Teilmenge F von Y erfüllt, einen $\mathcal{A}$ -meßbaren Schnitt.

(4) MICHAEL (1956)

Sei X ein abzählbar parakompakter, normaler Raum und Y eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes E . $\Phi : X \rightarrow Y$ sei eine nach unten halbstetige, punktkonvexe, punktabgeschlossene Korrespondenz.

Hinreichend für die Existenz eines stetigen Schnittes zu Φ ist jede der folgenden Bedingungen:

- (a) E ist ein separabler Frechet-Raum
- (b) Y ist separabel und die kanonische uniforme Struktur von Y ist vollständig metrisierbar.
- (c) E ist metrisierbar und separabel, Φ ist punktvollständig.

(5) MICHAEL (1956/1966)

Sei X ein normaler Raum und Y eine metrisierbare, konvexe kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes.

Dann hat jede nach unten halbstetige, punktabgeschlossene, punktkonvexe Korrespondenz $\Phi : X \rightarrow Y$ einen stetigen Schnitt.

- (6) Sei X ein nulldimensionaler topologischer Raum, Y ein metrischer Raum und $\Phi : X \rightarrow Y$ eine nach unten halbstetige, punktabgeschlossene Korrespondenz.

Hinreichend für die Existenz eines stetigen Schnittes zu Φ ist jede der folgenden Bedingungen:

- (a) X ist Lindelöfsch und Y ist vollständig
- (b) X ist Lindelöfsch und Φ ist punktvollständig

MICHAEL (1956)

- (c) X ist parakompakt und Y ist vollständig
- (d) X ist parakompakt und Φ ist punktvollständig
- (e) X ist normal und abzählbar parakompakt, Y ist vollständig und separabel
- (f) X ist normal und abzählbar parakompakt, Y ist separabel und Φ ist punktvollständig.

- (7) Sei X ein topologischer Raum, dessen Überdeckungsdimension Null ist, und Y ein kompakter metrischer Raum.
Dann hat jede nach unten halbstetige, punktabgeschlossene Korrespondenz Φ zwischen X und Y einen stetigen Schnitt.

(1.13) Bemerkungen

- (i) In (2) genügt es, vorauszusetzen, daß eine Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von konvexen Halbmetriken auf Y existiert, sodaß die davon erzeugte uniforme Struktur Hausdorffsch und vollständig ist.
- (ii) (1)(a) ist keine Konsequenz von (2), da eine translationsinvariante Metrik auf einem Frechet-Raum im allgemeinen keine konvexe Metrik ist.
- (iii) Ist Y wie unter (i), so erhält man in offensichtlicher Weise Resultate, die denen unter (4)(b), (c) und (5) entsprechen für Y . In dem (4) entsprechenden Fall muß man nur noch Separabilität von Y fordern.
- (iv) Durch (1.12) sind parakompakte Räume in gewisser Weise charakterisiert. Genauer gilt nach Michael [26] :
- Ist X ein topologischer (Hausdorff) Raum und gilt
- Zu jedem Banach Raum Y und jeder punktabgeschlossenen, punktkonvexen, nach unten halbstetigen Korrespondenz zwischen X und Y existiert ein stetiger Schnitt,
- so ist X parakompakt.
- (v) In (1.12)(1), (3) und (4) ist die Metrisierbarkeit von Y eine wesentliche Voraussetzung. Entsprechende Gegenbeispiele wurden von Corson & Lindenstrauss [8] und von v. Weizsäcker [35] angegeben.
- (vi) Mit Hilfe von (1.12)(5) wurde von A. Clausen u. Verf. [7] gezeigt, daß jede metrisierbare, im Sinne von Lima OE-kompakte konvexe Menge K regulär ist (d.h. daß es eine stetige Abbildung ζ von K in die Menge der maximalen Maße auf K gibt, sodaß das Maß $\zeta(x)$ für jedes $x \in X$ den Schwerpunkt x hat).

- (vii) Für Hüllenoperatoren, die den Fortsetzungsbedingungen aus (1.4)(iv) genügen, erhält man unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen Aussagen über die Existenz von stetigen Schnitten, die den Aussagen in (1.12) (1), (2), (4) und (5) entsprechen.

Beweis von (1.12):

(1) : Für $k \succ \text{card } Y$ ist Y' k -beschränkt.

- (a) und (b) ergeben sich aus (1.11), (1.2)(ii), (1.4)(ii) und (1.6)(ii),
(c) folgt aus (a) durch Übergang zur Vervollständigung von E .

(2) : Ergibt sich aus (1.11), (1.2)(ii), (1.4)(iii) und (1.6)(iii).

Die Aussage in Bemerkung (1.13)(i) erhält man ebenso.

(3) : Folgt aus (1.11), (1.2)(i), (1.4)(i), (1.6)(i) und (1.9)(ii).

(4) : (a) und (b) folgen aus (1.11), (1.2)(iii), (1.4)(ii), (1.6)(ii), und
(1.9)(ii). (c) ergibt sich wie unter (1) aus (a).

(5) : Folgt aus (1.11), (1.2)(iv), (1.4)(ii), (1.6)(ii) und (1.9)(i).

(6) : (a) folgt aus (1.11), (1.2)(v), (1.4)(i), (1.6)(i) und (1.9)(ii).

(b) folgt aus (a)

(c) folgt aus (1.11), (1.2)(vi), (1.4)(i), (1.6)(i) und (1.9)(ii).

(d) folgt aus (c).

(e) folgt aus (1.11), (1.2)(vii), (1.4)(i), (1.6)(i) und (1.9)(ii).

(f) folgt aus (e).

(7) : Folgt aus (1.11), (1.2)(viii), (1.4)(i), (1.6)(i) und (1.9)(i).

§ 2) Zur simultanen Fortsetzung stetiger Abbildungen

Aus Aussagen über die Existenz stetiger Schnitte zu nach unten halbstetigen Korrespondenzen lassen sich sofort Aussagen über die Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen gewinnen. Dies ergibt sich aus folgendem einfachen Lemma:

(2.1) Lemma

Seien X und Y topologische Räume, $\mathcal{C}$ ein Hüllenoperator auf Y und A eine abgeschlossene Teilmenge von X .

Ist $f : A \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so ist durch

$$x \mapsto \begin{cases} \{f(x)\} & \text{für } x \in A \\ \mathcal{C}(f(A)) & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$

eine nach unten halbstetige Korrespondenz Φ_f zwischen X und Y definiert.

Beweis:

Sei O eine offene Teilmenge von Y . Man kann annehmen, daß die Menge $O \cap \mathcal{C}(f(A))$ nicht leer ist. Also gilt $\Phi_f^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cup (X \setminus A)$. Da $f^{-1}(O)$ offen in A ist, und da A abgeschlossen ist, ist $\Phi_f^{-1}(O)$ offen, Φ_f also nach unten halbstetig.

Als einfache Folgerung erhält man daraus:

(2.2) Folgerung

Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{O}$ das System der offenen Teilmengen von X , Y ein uniformer Raum, $\mathcal{C}$ ein Hüllenoperator auf Y und erfüllen $(X, \mathcal{O})$, Y und $\mathcal{C}$ die Voraussetzungen von Satz (1.11), so gilt für jede abgeschlossene Teilmenge A von X :

Jede stetige Abbildung $f : A \rightarrow Y$ läßt sich zu einer stetigen Abbildung

$\tilde{f} : X \rightarrow Y$ fortsetzen sodaß $\tilde{f}(X) \subseteq \overline{\mathcal{C}(f(A))}$ gilt.

(Man beachte, daß $\mathcal{C}(\{y\}) = \{y\}$ für alle $y \in Y$ gilt.)

(2.3) Bemerkung

Ist insbesondere X ein parakompakter Raum, A eine abgeschlossene Teilmenge von X und Y ein Fréchet-Raum, so läßt sich jede Abbildung $f \in C(A, Y)$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ fortsetzen, derart daß $\tilde{f}(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}$ gilt.

Diese Eigenschaft charakterisiert im Gegensatz zu der in Bemerkung (1.13)(4) erwähnten Schnitteigenschaft nicht die Parakompaktheit topologischer Räume. Ist nämlich Ω die erste überabzählbare Ordinalzahl, so ist das Ordnungsintervall $X := [0, \Omega]$, versehen mit der Ordnungstopologie, ein normaler topologischer Raum, der nicht parakompakt ist (vergleiche [10], Seite 163). Für jede abgeschlossene Teilmenge A von X und jede stetige Abbildung f von A in einen topologischen Raum Y existiert jedoch eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}: X \rightarrow Y$, sodaß $\tilde{f}(X) \subseteq \overline{f(A)}$ gilt. Dies folgt daraus, daß die Limeszahlen die einzigen Häufungspunkte von X sind.

Unter den Voraussetzungen von Folgerung (2.2) erhält man somit eine Abbildung $T: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$, sodaß $Tf|_A = f$ und $Tf(X) \subseteq \overline{\tilde{C}(f(A))}$ für alle $f \in C(A, Y)$ gilt. T heißt dann eine simultane Fortsetzung.

Haben die beteiligten Räume stetiger Abbildungen zusätzlich die Struktur eines topologischen Vektorraumes oder eines topologischen Raumes, so erscheint es natürlich zu fragen, wann es stetige lineare oder stetige simultane Fortsetzungen gibt.

Die wohl bekannteste Aussage über die Existenz stetiger linearer simultaner Fortsetzungen ist der Satz von Borsuk - Dugundji, der in einer von Michael [25] angegebenen Version wie folgt lautet :

Satz (BORSUK - DUGUNDJI - MICHAEL)

Sei X ein topologischer Raum, A eine abgeschlossene metrisierbare Teilmenge von X und Y ein lokalkonvexer Raum. Ist X parakompakt, oder X normal und A separabel oder X vollständig regulär und A kompakt, so existiert eine lineare Abbildung $T : C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$, die stetig bezüglich der Topologien der gleichmäßigen Konvergenz auf $C(A, Y)$ und $C(X, Y)$ ist; sodaß für alle $f \in C(A, Y)$ gilt:

$$Tf|_A = f \quad \text{und} \quad Tf(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß sich dieses Resultat in einem Spezialfall auch durch eine einfache Anwendung von (1.12) (5) gewinnen läßt.

(2.4) Proposition

Sei X ein normaler Raum, A eine kompakte metrisierbare Teilmenge von X und Y ein separabler Fréchet-Raum.

Dann existiert eine stetige lineare Abbildung $T : C_U(A, Y) \rightarrow C_U(X, Y)$ sodaß für alle $f \in C(A, Y)$ gilt:

$$Tf|_A = f \quad \text{und} \quad Tf(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}$$

Beweis:

Sei Z der Raum der stetigen linearen Abbildungen von $C_U(A, Y)$ in Y , versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz.

Z ist ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum (vergleiche [32], S. 85, (4.4) Corollary). Die Abbildung $\varepsilon : A \rightarrow Z$, definiert durch $\varepsilon(a)(f) := f(a)$ für $f \in C(A, Y)$ ist stetig, und $\varepsilon(A)$ daher eine kompakte Teilmenge von Z . Wegen der Quasivollständigkeit von Z ist daher $K := \overline{\text{conv } \varepsilon(A)}$ eine konvexe kompakte Teilmenge von Z .

Wir zeigen nun, daß K metrisierbar ist.

Da A kompakt metrisch ist und Y separabel metrisch ist, ist $C_U(A, Y)$ separabel (vergleiche [5], Chap. X, page 24).

Sei also $D \subseteq C_U(A, Y)$ eine abzählbare dichte Menge. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf den Elementen von D ist eine metrisierbare lokalkonvexe Topologie auf Z , die gröber als die Topologie der

punktweisen Konvergenz auf den Elementen von $C(A, Y)$ ist.

Die Einschränkung beider Topologien auf die kompakte Menge Z ergibt daher dieselbe Topologie, Z ist also metrisierbar.

Aus (1.12)(5), (2.2) und (2.3) folgt damit, daß eine stetige Abbildung

$\varphi : X \rightarrow K$ existiert, die $\varphi(a) = \varepsilon(a)$ für alle $a \in A$ erfüllt.

Definiert man $T : C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ durch $Tf(x) := \varphi(x)(f)$, so ist

T offensichtlich linear und erfüllt $Tf_A = f$ für alle $f \in C(A, Y)$.

Weiter gilt für jedes $f \in C(A, Y) : Tf(X) \subseteq \left\{ \mu(f) : \mu \in \overline{\text{conv } \mathcal{E}(A)} \right\}$, woraus $Tf(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}$ folgt.

Dies wiederum impliziert, daß $\sup \{p(Tf(x)) : x \in X\} = \sup \{f(a) : a \in A\}$ für jede stetige Halbnorm p auf Y gilt. Daraus folgt, daß T stetig ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß unter den Voraussetzungen der Sätze von Michael und Bauer & Bear ((1.12)(1) und (2)) wenn nicht eine lineare, so doch eine stetige simultane Fortsetzung immer existiert. Darüber hinaus erhält man sogar eine Abbildung, die jeder Korrespondenz, welche den Voraussetzungen der jeweiligen Schnittsätze genügt, in stetiger Weise einen stetigen Schnitt zuordnet. Genauer gilt :

(2.5) Satz

Sei X ein parakompakter topologischer Raum und Y eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes E .

Es gelte :

(1) E ist ein lokalkonvexer Raum und Y vollständig metrisierbar oder

(2) Y wird durch eine konvexe Metrik vollständig metrisiert.

Sei weiter $\mathcal{K}_U^C(X, Y)$ der Raum der nach unten halbstetigen, punktabgeschlossenen, punktkonvexen Korrespondenzen zwischen X und Y , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Dann existiert eine stetige Abbildung $\gamma : \mathcal{K}_U^C(X, Y) \rightarrow C_U(X, Y)$,

sodaß $\gamma(\Phi)$ für jedes $\Phi \in \mathcal{K}_U^C(X, Y)$ ein stetiger Schnitt zu Φ ist.

Zum Beweis wird noch folgendes Lemma benötigt :

(2.6) Lemma

Seien X und Y topologische Räume, d eine stetige Halbmetrik auf Y , r eine positive reelle Zahl, $\Phi : X \rightarrow Y$ eine nach unten halbstetige Korrespondenz und $g : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

Für alle $x \in X$ gelte $d(g(x), \Phi(x)) < r$.

Dann ist durch $x \mapsto \Phi(x) \cap K(g(x), r, d)$ eine nach unten halbstetige Korrespondenz Ψ zwischen X und Y definiert.

Beweis:

Sei $O \subseteq Y$ offen, $x_0 \in X$, $y_0 \in \Psi(x_0) \cap O$. Nach Voraussetzung existiert dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $d(y_0, g(x_0)) < \lambda < r$.

Sei $U := g^{-1}(K(g(x_0), r - \lambda, d)) \cap \Phi^{-1}(O \cap K(g(x_0), \lambda, d))$.

U ist dann eine offene Umgebung von x_0 . Sei also $x \in U$.

Dann gilt $d(g(x_0), g(x)) < r - \lambda$ und es existiert ein $y \in O \cap \Phi(x)$ mit $d(y, g(x_0)) < \lambda$. Daraus folgt :

$d(y, g(x)) \leq d(y, g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) < r$, und daher gilt:

$y \in O \cap \Phi(x) \cap K(g(x), r, d) = \Psi(x) \cap O$.

Also ist Ψ nach unten halbstetig. (vgl. (0.7))

Beweis von Satz (2.5)

Für $\Phi \in \mathcal{K}_U^C(X, Y)$ sei $\Gamma(\Phi) := \{f \in C(X, Y) : f \text{ ist Schnitt zu } \Phi\}$.

Wegen (1.12)(1) bzw. (1.12)(2) ist durch $\Phi \mapsto \Gamma(\Phi)$ eine Korrespondenz Γ zwischen $\mathcal{K}_U^C(X, Y)$ und $C_U(X, Y)$ definiert, die offensichtlich punktkonvex und punktabgeschlossen ist.

Wir zeigen nun, daß Γ nach unten halbstetig ist.

Fall (1):

Sei $\Phi_0 \in \mathcal{K}_U^C(X, Y)$ und $f_0 \in \Gamma(\Phi_0)$. p sei eine stetige Halbnorm auf E und r sei eine positive reelle Zahl.

$$V := \{ \bar{\Phi} \in \mathcal{K}_U^C(X, Y) : \forall x \in X: \bar{\Phi}(x) \subseteq K(\bar{\Phi}_0(x), r/2, p), \\ \bar{\Phi}_0(x) \subseteq K(\bar{\Phi}(x), r/2, p) \}$$

ist eine Umgebung von $\bar{\Phi}_0$ in $\mathcal{K}_U^C(X, Y)$.

Sei $\bar{\Phi} \in V$ und $x \in X$. Dann gilt:

$$f_0(x) \in \bar{\Phi}_0(x) \subseteq K(\bar{\Phi}(x), r/2, p).$$

Nach Lemma (2.6) ist daher durch $x \mapsto \bar{\Phi}(x) \cap K(f_0(x), r/2, p) \cap Y$ eine nach unten halbstetige Korrespondenz zwischen X und Y definiert.

Da diese Korrespondenz offensichtlich punktkonvex ist, existiert nach (1.12)(1) eine Abbildung $f \in C_U(X, Y)$, sodaß für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x) \in \overline{\bar{\Phi}(x) \cap K(f_0(x), r/2, p)} \subseteq \bar{\Phi}(x) \cap \overline{K(f_0(x), r/2, p)} \subseteq \\ \subseteq \bar{\Phi}(x) \cap K(f_0(x), r, p) \quad . \quad (\text{vgl. auch (0.7)})$$

f ist also ein Element von $\Gamma(\bar{\Phi})$ und für alle $x \in X$ gilt die Ungleichung:

$$p(f(x), f_0(x)) < r.$$

Damit ist gezeigt, daß Γ nach unten halbstetig ist.

Fall (2):

Der Beweis verläuft wie im ersten Fall, man hat anstelle der Halbnorm p nur eine konvexe Metrik d auf Y zu verwenden, und (1.12)(1) durch (1.12)(2) zu ersetzen.

Nunmehr ist $C_U(X, Y)$ im Fall (1) eine vollständige, metrisierbare konvexe Teilmenge des lokalkonvexen Raumes $C_U(X, E)$, während im Fall (2) $C_U(X, E)$ eine konvexe Teilmenge des Vektorraumes E^X ist, die durch die konvexe Metrik $\tilde{d}$, definiert durch

$$\tilde{d}(f, g) := \sup \{ \min(d(f(x), g(x)), 1) : x \in X \}$$

vollständig metrisiert wird.

Schließlich ist $\mathcal{K}_U^C(X, Y)$ in beiden Fällen metrisierbar (vgl. (0.8)), also parakompakt.

Die Behauptung des Satzes folgt somit aus (1.12)(1) bzw. (1.12)(2).

(2.7) Korollar

Sei X ein parakompakter Raum, A eine abgeschlossene Teilmenge von X und Y eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes E .

Es gelte :

- (1) E ist ein lokalkonvexer Raum und Y vollständig metrisierbar oder
- (2) Y wird durch eine konvexe Metrik vollständig metrisiert.

Dann existiert eine stetige Abbildung $T : C_U(A, Y) \longrightarrow C_U(X, Y)$,
sodaß für alle $f \in C_U(A, Y)$ gilt :

$$Tf|_A = f \quad \text{und} \quad Tf(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}.$$

Beweis:

Für $f \in C(A, Y)$ sei eine Korrespondenz $\Phi_f : X \longrightarrow Y$ definiert durch

$$\Phi_f(x) := \begin{cases} \{f(x)\} & \text{für } x \in A \\ \overline{\text{conv } f(A)} & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Wegen Lemma (2.1) ist $f \longmapsto \Phi_f$ eine Abbildung von $C_U(A, Y)$ in $\mathcal{K}_U^C(X, Y)$. Es genügt zu zeigen, daß diese Abbildung stetig ist, da dann die Behauptung aus Satz (2.5) folgt.

Fall (1):

Sei p eine stetige Halbnorm auf E , $r > 0$ und

$$W := \left\{ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{K}_U^C(X, Y) \times \mathcal{K}_U^C(X, Y) : \forall x \in X : \begin{aligned} &\Psi(x) \subseteq K(\Phi(x), r, p) \\ &\Phi(x) \subseteq K(\Psi(x), r, p) \end{aligned} \right\}$$

das durch p und r bestimmte Element einer Nachbarschaftsbasis des
uniformen Raumes $\mathcal{K}_U^C(X, Y)$. (vgl. (0.8))

$V := \left\{ (f, g) \in C(A, Y) \times C(A, Y) : \forall a \in A : p(f(a) - g(a)) < r/2 \right\}$
ist dann eine Nachbarschaft des uniformen Raumes $C_U(A, Y)$. (vgl. (0.4))

Sei $(f, g) \in V$.

Ist $x \in A$, so gilt: $\Phi_f(x) = \{f(x)\} \subseteq K(\{g(x)\}, r/2, p) = K(\Phi_g(x), r/2, p)$
und $\Phi_g(x) \subseteq K(\Phi_f(x), r/2, p)$

Sei nun $x \in X \setminus A$, also $\tilde{\Phi}_f(x) = \overline{\text{conv } f(A)}$ und $\tilde{\Phi}_g(x) = \overline{\text{conv } g(A)}$.

Es gilt $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq \bigcup \{K(g(x), r/2, p) : x \in A\} = K(g(A), r/2, p)$,

also $\text{conv } f(A) \subseteq \text{conv } K(g(A), r/2, p) \subseteq$
 $\subseteq \text{conv } K(\text{conv } g(A), r/2, p) = K(\text{conv } g(A), r/2, p)$.

(Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da p eine Halbnorm ist.)

Daher folgt $\overline{\text{conv } f(A)} \subseteq \overline{K(\text{conv } g(A), r/2, p)} \subseteq$
 $\subseteq K(\text{conv } g(A), r, p) \subseteq K(\overline{\text{conv } g(A)}, r, p)$

Ebenso zeigt man, daß $\overline{\text{conv } g(A)} \subseteq K(\overline{\text{conv } f(A)}, r, p)$ gilt.

Zusammen ergibt dies: $(\tilde{\Phi}_f, \tilde{\Phi}_g) \in W$.

Also ist $f \mapsto \tilde{\Phi}_f$ sogar eine gleichmäßig stetige Abbildung.

Die Argumentation im Fall (2) verläuft analog, wenn man die Halbnorm p durch eine konvexe Metrik d ersetzt.

Korollar (2.7) ist damit vollständig bewiesen.

(2.8) Bemerkung

Ist in (2.7)(1) E sogar ein normierter Raum, so gilt zusätzlich

$\|Tf\| = \|f\|$ für jede beschränkte Abbildung $f \in C_u(A, Y)$.

Dies folgt sofort aus der Inklusion $Tf(X) \subseteq \overline{\text{conv } f(A)}$.

§ 3) Zur Metrisierbarkeitsvoraussetzung an den Bildbereich
im Satz von Michael

Es ist bekannt, daß die Metrisierbarkeit des Bildbereiches eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit des Michaelschen Satzes ist. Entsprechende Gegenbeispiele wurden - wie bereits erwähnt - von Corson & Lindenstrauss und von v. Weizsäcker angegeben.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß für schwache lokalkonvexe Räume als Bildbereich die Metrisierbarkeitsvoraussetzung sogar notwendig für eine "universelle" Gültigkeit des Michaelschen Satzes ist.

Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei ein mengentheoretisches Lemma, das v. Weizsäcker zur Konstruktion seines Gegenbeispiels benutzte. Diese Konstruktion diente auch als Modell für die hier angegebene Konstruktion.

Was unter der "universellen" Gültigkeit des Michaelschen Satzes für einen lokalkonvexen Raum als Bildbereich verstanden wird, präzisiert die folgende Definition.

(3.1) Definition

Ein lokalkonvexer Raum E besitzt die Michaelsche Schnitteigenschaft (MSE), falls für jeden kompakten Raum X gilt:

Jede nach unten halbstetige, punktabgeschlossene, punktkonvexe Korrespondenz zwischen X und E besitzt einen stetigen Schnitt.

(3.2) Bemerkung

Nach (1.12)(1) hat jeder Fréchet-Raum die MSE.

Ziel dieses Paragraphen ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

(3.3) Satz

Sei (E, τ) ein schwacher lokalkonvexer Raum.

Dann sind äquivalent :

- (i) $(\widehat{E}, \widehat{\tau})$ hat die MSE
- (ii) (E, τ) ist metrisierbar

(3.4) Bemerkung

Aus der Metrisierbarkeit von (E, τ) folgt im allgemeinen nicht, daß (E, τ) die MSE besitzt, da auch die Vollständigkeit des Bildbereiches eine wesentliche Voraussetzung im Satz von Michael ist (vgl. Michael [26]).

Der Beweis von Satz (3.3) wird mit Hilfe mehrerer Lemmata geführt, zu deren Formulierung noch folgende Vereinbarungen benötigt werden.

(3.5) Vereinbarung

Sei M eine Menge.

Mit $M(2)$ wird das System der nicht leeren, höchstens zwei-elementigen Teilmengen von M bezeichnet.

$\widetilde{M} = M \cup \{\omega\}$ bezeichnet die Alexandroff-Kompaktifizierung des diskreten Raumes M .

Die Mengen der Form $\{F \in \widetilde{M}(2) : F \cap O \neq \emptyset\}$ und $\{F \in \widetilde{M}(2) : F \subseteq O\}$

bilden eine Subbasis der sogenannten endlichen Topologie auf $\widetilde{M}(2)$, wenn O das System der offenen Teilmengen von $\widetilde{M}$ durchläuft.

(Diese Topologie wird auch als Vietoris-Topologie bezeichnet. Die Bezeichnung "endliche Topologie" ist von Michael [24] übernommen.)

Vorsehen mit dieser Topologie wird $\widetilde{M}(2)$ zu einem kompakten Raum (vgl. [24]).

Eine Abbildung $t : M(2) \longrightarrow M$ heißt eine Auswahl, falls $t(F) \in F$ für alle $F \in M(2)$ gilt.

Das folgende Lemma ist aus der linearen Algebra wohlbekannt.

(3.6) Lemma

Sei E ein Vektorraum und A eine linear unabhängige Familie von Linearformen auf E .

Dann existiert zu jedem $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ und jedem $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ aus $\mathbb{K}^n$ ein Element e von E , sodaß für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\langle e, a_i \rangle := a_i(e) = \delta_i$$

(3.7) Lemma (v. Weizsäcker [35])

Sei k eine unendliche Kardinalzahl, M eine Menge mit $\text{card } M > k$ und $t : M(2) \longrightarrow M$ eine Auswahl.

Dann existiert ein $x \in M$ mit

$$\text{card } \{y \in M : t(\{x, y\}) = x\} \geq k.$$

Der Vollständigkeit halber wird der Beweis angegeben:

Sei H eine Teilmenge von M mit $\text{card } H = k$.

Falls $\text{card } \{y \in M : t(\{x, y\}) = x\} < k$ für alle $x \in H$ gilt, so sei

$$K := \bigcup \{ \{z \in M : t(\{y, z\}) = y\} : y \in H \}.$$

Da k unendlich ist, folgt $\text{card } K \leq k \cdot \text{card } H = k \cdot k = k$, also ist $M \setminus K$ nicht leer.

Für $x \in M \setminus K$ ergibt sich dann, daß $t(\{x, y\}) = x$ für alle $y \in H$ gelten muß. Wegen $\text{card } H = k$ folgt daraus die Behauptung.

Im folgenden Lemma wird zu einem gegebenen schwachen lokalkonvexen Raum E ein kompakter "Testraum" und eine nach unten halbstetige "Testkorrespondenz" zwischen diesem Raum und E konstruiert.

(3.8) Lemma

Sei E ein Vektorraum und A ein linear unabhängiges System von Linearformen auf E .

Für $F \in \tilde{A}(2)$ sei:

$$\Phi(F) := \begin{cases} \{e \in E : \langle e, a \rangle \geq 0 \text{ für } a \in F \cap A, \sum_{a \in F \cap A} \langle e, a \rangle = 1\} \\ \text{für } F \neq \{\omega\}, \\ \{0\} \text{ für } F = \{\omega\}. \end{cases}$$

Dann ist Φ eine punktkonvexe Korrespondenz zwischen $\tilde{A}(2)$ und E , die bezüglich $\tilde{G}(E, A)$ punktabgeschlossen und nach unten halbstetig ist.

Beweis:

Wegen (3.6) ist Φ eine Korrespondenz zwischen $\tilde{A}(2)$ und E , die offensichtlich punktkonvex und bezüglich $\tilde{G}(E, A)$ punktabgeschlossen ist.

Zum Beweis, daß Φ nach unten halbstetig ist, seien $F \in \tilde{A}(2)$, $e \in \Phi(F)$, T eine endliche Teilmenge von A und $\varepsilon > 0$.

Dann ist zu zeigen:

Es gibt eine Umgebung $\tilde{U}$ von F in $\tilde{A}(2)$, sodaß für jedes $G \in \tilde{U}$ ein $e' \in \Phi(G)$ existiert, welches für alle $a \in T$ die Ungleichung $|\langle e', a \rangle - \langle e, a \rangle| < \varepsilon$ erfüllt.

Fall 1: $F \subseteq A$

$$\text{Dann ist } \tilde{U} := \{F\} = \{G \in \tilde{A}(2) : G \subseteq F\} \cap \bigcap \{G \in \tilde{A}(2) : G \cap \{a\} \neq \emptyset\} : a \in F\}$$

eine Umgebung von F , die die gewünschten Eigenschaften hat.

Fall 2: $F = \{a, \omega\}$ mit $a \in A$

Also gilt $\langle e, a \rangle = 1$.

$$\text{Sei } \tilde{U} := \{G \in \tilde{A}(2) : G \cap \{a\} \neq \emptyset, G \subseteq (A \setminus T) \cup \{a\}\}.$$

$\tilde{U}$ ist dann eine offene Umgebung von F .

Ist $G \in \tilde{U}$, so gilt $a \in G$ und insbesondere $G \neq \{\omega\}$.

Nach (3.6) existiert $e' \in E$, sodaß gilt:

$$\langle e', a \rangle = 1 = \langle e, a \rangle$$

$$\langle e', b \rangle = 0 \quad \text{für } b \in G \setminus (T \cup \{a\})$$

$$\langle e', b \rangle = \langle e, b \rangle \quad \text{für } b \in T \setminus \{a\}$$

Dann gilt für $b \in T$: $|\langle e', b \rangle - \langle e, b \rangle| = 0$

$$\text{Weiter folgt: } \sum_{b \in G \cap A} \langle e', b \rangle = \langle e', a \rangle = 1$$

Schließlich erhält man wegen $G \cap A \subseteq (G \setminus T) \cup \{a\}$, daß $\langle e', b \rangle \neq 0$ für $b \in G \cap A$ gilt.

Also ist e' ein Element von $\Phi(G)$.

Fall 3: $F = \{\omega\}$.

Also gilt $\Phi(F) = \{0\}$ und daher $e = 0$.

$\tilde{U} := \{G \in \tilde{A}(2) : G \subseteq \tilde{A} \setminus T\}$ ist eine offene Umgebung von F .

Ist $G \in \tilde{U}$, so existiert nach (3.6) ein $e' \in E$, sodaß gilt:

$$\langle e', b \rangle = 0 \quad \text{für } b \in T$$

$$\langle e', b \rangle = 1, \text{ falls } G = \{b, \omega\} \text{ bzw.}$$

$$\langle e', a \rangle = \langle e', b \rangle = 1/2, \text{ falls } G = \{a, b\}.$$

Wieder folgt, daß e' ein Element von $\Phi(G)$ ist, und daß

$$|\langle e', b \rangle - \langle e, b \rangle| = 0 \quad \text{für alle } b \in T \text{ gilt.}$$

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

(3.9) Lemma

Sei E ein topologischer Vektorraum und A eine Familie stetiger Linearformen auf E .

$p : \tilde{A}(2) \rightarrow E$ sei eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \langle p(\{a, y\}), a \rangle \neq 0 \quad \text{für } (a, y) \in A \times \tilde{A}$$

$$(ii) \quad \langle p(\{a, b\}), a \rangle + \langle p(\{a, b\}), b \rangle = 1 \quad \text{für } (a, b) \in A \times A$$

$$(iii) \quad \lim_{y \rightarrow \omega} \langle p(\{a, y\}), a \rangle = \langle p(\{a, \omega\}), a \rangle \quad \text{für } a \in A.$$

Dann ist die Menge $B := \{a \in A : \langle p(a, \omega), a \rangle \neq 3/4\}$

höchstens abzählbar.

Beweis:

Wir nehmen an, daß $\text{card } B \gg k := \aleph_0$ gilt.

Aus (i) und (ii) folgt mit Hilfe des Auswahlaxioms, daß eine Auswahl $t : B(2) \rightarrow B$ existiert, mit

$$\langle p(\{a, b_j\}), t(\{a, b_j\}) \rangle \leq 1/2 \quad \text{für alle } (a, b) \in B \times B.$$

Nach Lemma (3.7) gibt es dann ein $b_0 \in B$, sodaß

$$\text{card } \{b \in B : t(\{b, b_0\}) = b_0\} \geq k \quad \text{gilt.}$$

Also existiert eine Teilmenge M von B mit $\text{card } M \gg k$, sodaß für alle $b \in M$ gilt : $\langle p(\{b_0, b_j\}), b_0 \rangle \leq 1/2$.

Da M eine unendliche Teilmenge von A ist, ist ω ein Berührungspunkt von M . Also existiert ein Netz $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in M , das gegen ω konvergiert. Wegen (iii) folgt damit:

$$1/2 \gg \lim_{\lambda \in \Lambda} \langle p(\{b_0, b_\lambda\}), b_0 \rangle = \langle p(\{b_0, \omega\}), b_0 \rangle$$

im Widerspruch zu $b_0 \in B$.

Man erhält nun leicht den folgenden Hilfssatz.

(3.10) Hilfssatz

Sei E ein topologischer Vektorraum und A eine nicht leere Menge von stetigen Linearformen auf E .

$\tilde{\Phi} : \tilde{A}(2) \rightarrow E$ sei eine Korrespondenz mit folgender Eigenschaft:

Ist $F \in \tilde{A}(2)$ und $F \neq \{\omega\}$, so gilt:

$$\langle e, a \rangle \gg 0 \quad \text{für } e \in \tilde{\Phi}(F) \text{ und } a \in F \cap A$$

$$\sum_{a \in F \cap A} \langle e, a \rangle = 1 \quad \text{für } e \in \tilde{\Phi}(F).$$

Dann ist A höchstens abzählbar, wenn ein stetiger Schnitt zu $\tilde{\Phi}$ existiert.

Beweis:

Sei p ein stetiger Schnitt zu $\tilde{\Phi}$.

Da p ein Schnitt zu $\tilde{\Phi}$ ist, folgt aus den Eigenschaften von $\tilde{\Phi}$, daß p die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma (3.9) erfüllt.

Da p stetig ist, und da A eine Familie stetiger Linearformen auf E ist, erfüllt p auch die Voraussetzung (iii) von Lemma (3.9).

Schließlich folgt aus den Eigenschaften von $\hat{\Phi}$, daß für alle $a \in A$ gilt:

$$\langle p(\{a, \omega\}), a \rangle = 1.$$

Die Behauptung ergibt sich somit aus Lemma (3.9).

Mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln kann Satz (3.3) nun leicht bewiesen werden.

Beweis von Satz (3.3):

Die Implikation " $(ii) \implies (i)$ " ergibt sich sofort aus (1.12)(1), da mit (E, τ) auch $(\hat{E}, \hat{\tau})$ metrisierbar ist.

Zum Beweis von " $(i) \implies (ii)$ " sei H eine Familie von Linearformen auf E , sodaß $\tau = \mathcal{G}(E, H)$ gilt.

Sei dann A eine Hamel-Basis des durch H erzeugten linearen Teilraumes des algebraischen Dualraumes von E . Offensichtlich gilt dann $\tau = \mathcal{G}(E, H) = \mathcal{G}(E, A)$.

Sei $\hat{\Phi}: \tilde{A}(2) \rightarrow E$ wie in Lemma (3.8) definiert. Also ist $\hat{\Phi}$ nach unten halbstetig bezüglich τ .

Definiert man $\hat{\Phi}: \tilde{A}(2) \rightarrow E$ durch $\hat{\Phi}(F) := \overline{\hat{\Phi}(F)}^{\hat{\tau}}$ (Abschluß von $\hat{\Phi}(F)$ bezüglich $\hat{\tau}$), so ist $\hat{\Phi}$ eine nach unten halbstetige, punktabgeschlossene, punktkonvexe Korrespondenz zwischen dem kompakten Raum $\tilde{A}(2)$ und $\hat{E}$.

Da sich jedes $a \in A$ auf genau eine Weise zu einer stetigen Linearform $\hat{a}$ auf $\hat{E}$ fortsetzen läßt, kann man A mit einer Familie stetiger Linearformen auf $\hat{E}$ identifizieren.

Weiter gilt für jedes $F \in \tilde{A}(2)$ mit $F \neq \{\omega\}$:

$$\{\hat{e} \in \hat{E} : \sum_{a \in F \cap A} \langle \hat{e}, \hat{a} \rangle = 1, \langle \hat{e}, \hat{a} \rangle \geq 0 \text{ für } a \in F \cap A\}$$

ist eine $\hat{\tau}$ -abgeschlossene Obermenge von $\hat{\Phi}(F)$.

$\hat{\Phi}$, A und $\hat{E}$ erfüllen somit die Voraussetzungen von (3.10).

Da nach Voraussetzung $(\hat{E}, \hat{\tau})$ die MSE besitzt, existiert ein stetiger Schnitt zu Φ , weshalb A nach Hilfssatz (3.10) höchstens abzählbar ist. Insbesondere ist dann (E, τ) metrisierbar.

(3.11) Folgerungen

- (1) Sei X ein Banach-Raum und w die schwache Topologie auf X. Dann sind äquivalent:
 - (i) $(\hat{X}, \hat{w})$ hat die MSE
 - (ii) X ist endlichdimensional
 - (iii) (X, w) hat die MSE
- (2) Sei X ein Banach-Raum, X' sein stetiger Dualraum und w^* die schwach*-Topologie auf X' . Dann sind äquivalent:
 - (i) $(\hat{X}', \hat{w}^*)$ hat die MSE
 - (ii) X ist endlichdimensional
 - (iii) (X', w^*) hat die MSE
- (3) Ein schwacher lokalkonvexer Raum (E, τ) , der die MSE besitzt, ist metrisierbar.
- (4) Sei A eine überabzählbare Menge, $E := \mathbb{K}^A$ und τ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf E.
 Dann existiert eine kompakte Teilmenge Y von E und eine nach unten halbstetige, punktabgeschlossene, punktkonvexe Korrespondenz zwischen dem kompakten topologischen Raum $\tilde{A}(2)$ und Y, die keinen stetigen Schnitt hat.

Beweis:

- (1) Gelte (i):

Aus dem Beweis von Satz (3.3) geht hervor, daß dann der Dualraum X' von X von abzählbarer algebraischer Dimension sein muß. Wegen des Baireschen Kategoriesatzes folgt daraus, daß X' sogar endlichdimensional sein muß, also auch X endlichdimensional ist.

Gilt (ii), so ist $(\hat{X}, \hat{w}) = (X, w)$ und hat nach (3.2) die MSE. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) zeigt man ebenso.

- (2) Der Beweis verläuft analog dem Beweis von (1)
- (3) Man verfare wie im Beweis von (3.3) "(i) $\Rightarrow$ (ii), wobei $\widehat{\Phi}$ durch $\tilde{\Phi}$ zu ersetzen ist.
- (4) Sei $Y := [-1, 1]^{\mathbb{K}}$. Man überzeugt sich leicht, daß in Lemma (3.8) die Korrespondenz $\tilde{\Phi}$ sogar so gewählt werden kann, daß $\tilde{\Phi}(F) \subseteq Y$ für alle $F \in \tilde{A}(2)$ gilt. Da A nach Voraussetzung überabzählbar ist, kann diese Korrespondenz keinen stetigen Schnitt haben.

(3.12) Bemerkungen

- (1) Aus der Annahme, daß (E, τ) die MSE hat, kann nicht - jedenfalls nicht ohne weitere Überlegungen - geschlossen werden, daß $(\widehat{E}, \widehat{\tau})$ die MSE besitzt.
So ist für eine Korrespondenz $\widehat{\Phi} : K \rightarrow \widehat{E}$ zwischen einem kompakten Raum K und $\widehat{E}$ durch $x \mapsto \tilde{\Phi}(x) := E \cap \widehat{\Phi}(x)$ nicht notwendig eine Korrespondenz zwischen K und E definiert.
- (2) In der Literatur findet sich manchmal (vg. etwa [13], Seite 64, Satz 13.10) die falsche Behauptung, daß die schwach*-Topologie auf dem Dualraum eines separablen Banach-Raumes X metrisierbar ist. Dies trifft im allgemeinen nicht zu, denn aus Folgerung (3.11)(2) ergibt sich, daß dann X endlichdimensional sein muß.
- (3) Folgerung (3.11)(4) zeigt - wie auch die Gegenbeispiele von Corson & Lindenstrauss [8] und von v. Weizsäcker [35] - , daß auch in (1.12)(5) die Metrisierbarkeit des Bildbereiches eine wesentliche Voraussetzung ist.

Als weitere Folgerung aus Satz (3.3) erhält man, daß kompakte Räume K und lokalkonvexe Räume E existieren derart, daß $C_{\cup}(K, E)$ weder parakompakt noch Lindelöfsch ist.

(3.13) Folgerung

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein nicht metrisierbarer, vollständiger schwacher lokal-konvexer Raum.

Dann gibt es einen kompakten Raum K , derart, daß $C_U(K, E)$ weder parakompakt noch Lindelöfsch ist.

Beweis:

Ist K ein kompakter Raum und $(E, \mathcal{T})$ ein vollständiger lokalkonvexer Raum derart, daß $C_U(K, E)$ parakompakt oder Lindelöfsch ist, so hat nach einem Resultat von Ch. Leger [19] jede nach unten halbstetige, punktabgeschlossene, punktkonvexe Korrespondenz zwischen K und E einen stetigen Schnitt. Die Behauptung ergibt sich somit aus Satz (3.3).

(3.14) Bemerkungen

- (1) Ein explizites Beispiel ist etwa gegeben durch:

$$E := \underbrace{\mathbb{R}^{[0,1]}}_{(2)}, \quad \mathcal{T} \text{ die Produkttopologie auf } E \text{ und} \\ K := [0,1].$$

- (2) Im Zusammenhang mit dieser Problemstellung vergleiche man auch A.H. Stone [33].

- (3) Ist E ein lokalkonvexer Raum und F ein abgeschlossener Teilraum von E , so haben mit E auch F und E/F die MSE. (Für F ist diese Aussage trivial, für E/F folgt sie aus der Offenheit der Quotientenabbildung). Weiter ist bekannt, daß die Vollständigkeit des Bildbereiches eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit des Michaelschen Schnittsatzes ist (vgl. [26]). Schließlich ist auch bekannt, daß Fréchet-Räume die oben angeführten Permanenzeigenschaften besitzen, während der Quotient eines beliebigen vollständigen lokalkonvexen Raumes nach einem abgeschlossenen Unterraum nicht notwendig vollständig ist. Diese Beobachtungen können als Anlaß für die folgende Vermutung dienen: Ein vollständiger lokalkonvexer Raum hat die MSE genau dann, wenn er metrisierbar ist.

Satz (3.3) zeigte, daß die Metrisierbarkeit des Bildbereiches in manchen Fällen eine notwendige Voraussetzung für die universelle Gültigkeit des Michaelsschen Schnitssatzes ist. Unter weiteren Voraussetzungen läßt sich jedoch manchmal auf diese Bedingung verzichten.

Ein Resultat von diesem Typ ist der Satz von Corson und Lindenstrauss [8]. In diesem Satz wird folgendes vorausgesetzt:

Der Definitionsbereich der Korrespondenz ist ein parakompakter Raum mit der Eigenschaft, daß jeder seiner Punkte eine Umgebung besitzt, die stetiges Bild eines Polnischen Raumes ist. Die Korrespondenz ist nach unten halbstetig, punktkonvex und punktkompakt. Der Bildbereich der Korrespondenz ist der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem diskreten Raum, die im Unendlichen verschwinden, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz.

Eine andere Möglichkeit, auf die Metrisierbarkeit des gesamten Bildbereiches zu verzichten, besteht darin sie nur "lokal" zu verlangen.

(3.15) Satz

Sei X ein parakompakter topologischer Raum, Y ein vollständiger lokalkonvexer Raum und $\Phi : X \rightarrow Y$ eine nach unten halbstetige, punktabgeschlossene, punktkonvexe Korrespondenz.

Weiter gelte:

Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebung U , sodaß der von

$\Phi(U) := \bigcup \{ \Phi(x) : x \in U \}$ aufgespannte Teilraum $\text{sp } \Phi(U)$ von Y metrisierbar ist.

Dann existiert ein stetiger Schnitt zu Φ .

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X , sodaß $\text{sp } \Phi(U)$ für jedes $U \in \mathcal{U}$ metrisierbar ist. Da X parakompakt ist, existiert eine abgeschlossene, lokalendliche Verfeinerung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{U}$. Jedes $V \in \mathcal{M}$ ist dann selbst parakompakt und $\text{sp } \Phi(V)$ ist ebenfalls metrisierbar. Sei schließlich $\{f_V : V \in \mathcal{M}\}$ eine $\mathcal{M}$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf X .

Nach (1.12(1)) existiert für jedes $V \in \mathcal{M}$ eine stetige Abbildung

$\varphi_V : V \rightarrow Y$, sodaß $\varphi_V(x) \in \tilde{\Phi}(x)$ für jedes $x \in V$ gilt.

Definiert man $f : X \rightarrow Y$ durch

$$f(x) := \sum_{V \in \mathcal{M}} f_V(x) \cdot \varphi_V(x) ,$$

so ist f wohldefiniert und stetig, da die Überdeckung $\mathcal{M}$ lokalendlich war.

Schließlich ist f ein Schnitt zu $\tilde{\Phi}$, da $\{\varphi_V : V \in \mathcal{M}\}$ eine Zerlegung

der Eins ist, und da $\tilde{\Phi}$ nach Voraussetzung punktkonvex ist.

Anhang : Anwendungen des Satzes von Kuratowski & Ryll-Nardzewski

Der wohl am häufigsten benutzte Existenzsatz für meßbare Schnitte besagt, daß analytische Korrespondenzen zwischen analytischen Räumen universell meßbare Schnitte besitzen. Dieses Resultat - aus dem auch das Measurable Choice Theorem von v. Neumann folgt - wurde in dieser oder ähnlicher Form unter anderem von Aumann [1], Castaing [6], Hoffmann-Jørgensen [14], Himmelberg und van Vleck [12], Sainte Beuve [31] und Leese [18] bewiesen. Der nachfolgende Beweis dieses Resultats findet sich bereits in der Arbeit [22] des Verfassers.

Die nachfolgende Definition analytischer Räume ist von Hoffmann-Jørgensen [14] übernommen. Dort findet sich auch eine eingehende Untersuchung analytischer Räume.

1. Definition

Ein topologischer (Hausdorff) Raum heißt analytisch, falls er das stetige Bild eines Polnischen Raumes ist. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt analytisch, falls sie bezüglich der Relativtopologie ein analytischer Raum ist.

2. Satz

Seien X und Y analytische topologische Räume und Φ eine analytische Korrespondenz zwischen X und Y .

Dann existiert ein universell meßbarer Schnitt zu Φ .

Beweis:

Sei P ein Polnischer Raum und $s : P \longrightarrow \Phi$ eine stetige Surjektion.

Sei $\mathcal{A}$ die $\mathcal{B}$ -Algebra der universell meßbaren Teilmengen von X .

Es ist $\Psi := \{(x, p) \in X \times P : \exists y \in \Phi(x) : s(p) = (x, y)\}$ eine punktabgeschlossene Korrespondenz zwischen X und P .

Für eine Teilmenge A von P gilt $\Psi^{-1}(A) = p_X(s(A))$, wobei p_X die Projektion von $X \times Y$ auf X bezeichnet.

Ist deshalb A eine abgeschlossene Teilmenge von P , also selbst ein Polnischer Raum, so ist $\Psi^{-1}(A)$ als stetiges Bild von A eine analytische Teilmenge von X und gehört deshalb zu $\mathcal{A}$ (vgl. [14], II.9 Cor.3, III.2 Theorem 4). Nach dem Satz von Kuratowski & Ryll-Nardzewski (1.12)(3) existiert daher ein universell meßbarer Schnitt zu Φ .

3. Korollar

Seien X und Y analytische topologische Räume und f eine Borel-meßbare Surjektion von X auf Y .

Dann existiert eine universell meßbare Abbildung $g : Y \longrightarrow X$, sodaß für alle $y \in Y$ gilt: $y = f(g(y))$.

Beweis:

Der Graph von f ist eine analytische Teilmenge von $X \times Y$ (vgl. [14], III.4 Thm. 1), weshalb durch $y \longmapsto \Phi(y) := f^{-1}(y)$ eine analytische Korrespondenz Φ zwischen Y und X definiert ist. Die Behauptung folgt somit aus Satz 2.

4. Bemerkung

Aus Korollar 3 ergibt sich sofort das v. Neumannsche Measurable Choice Theorem :

Sei P ein Polnischer Raum, A eine analytische Teilmenge von P , f eine stetige Abbildung von A in $\mathbb{R}$ und λ ein Lebesgue-Stieltjes Maß auf $\mathbb{R}$. Dann ist $f(A)$ eine λ -meßbare Menge und es existiert eine λ -meßbare Abbildung $g : f(A) \longrightarrow A$, sodaß $f(g(x)) = x$ für alle $x \in f(A)$ gilt.

Zum Beweis hat man nur zu bemerken, daß $f(A)$ eine analytische Teilmenge von $\mathbb{R}$, und daher sogar universell meßbar ist. Die Existenz der Abbildung g folgt aus Korollar 3.

Als weiteres Korollar erhält man eine Existenzaussage für Urbildmaße.

4. Korollar (Yershov [36], Lubin [21], Landers und Rogge [17])

Seien X und Y analytische Räume, f eine Borel-meßbare Surjektion von X auf Y und μ ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf Y . Dann existiert ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf X , sodaß für das Bildmaß $f(\nu)$ von ν unter f gilt: $f(\nu) = \mu$.

Beweis:

Nach Korollar 3 existiert eine universell meßbare Abbildung $g: Y \rightarrow X$, sodaß $y = f(g(y))$ für alle $y \in Y$ gilt. $\nu := g(\mu)$ leistet dann das Verlangte.

Es erscheint nun natürlich, zu fragen, unter welchen Bedingungen ein solches Urbildmaß eindeutig bestimmt ist. Eine derartige Bedingung wurde von Yershov in [36] unter den Voraussetzungen von Korollar 4 angegeben. Unter schärferen Voraussetzungen fand Eisele [11] eine weitere - sehr natürliche - Eindeigkeitsbedingung. Er zeigte:

Seien X und Y kompakte metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion und μ ein positives normiertes Radonmaß auf Y .

Es existiert genau ein positives normiertes Radonmaß ν auf X mit

$f(\nu) = \mu$ dann und nur dann, wenn die Menge

$S := \{y \in Y: \text{card } f^{-1}(y) \geq 2\}$, die universell meßbar ist, eine μ -Nullmenge ist.

Dieses Eindeigkeitskriterium wurde in [20] auf die Situation von Korollar 4 verallgemeinert.

5. Satz (J. Lehn u. Verf. [20])

Seien X und Y analytische topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Borel-meßbare Surjektion und μ ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf Y .

Dann ist $S := \{y \in Y : \text{card } f^{-1}(y) \geq 2\}$ universell meßbar und die folgenden Aussagen sind äquivalent :

- (i) S ist eine μ -Nullmenge
- (ii) Es existiert genau ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf X , sodaß $f(\nu) = \mu$ gilt.

Beweis:

Nach [14], III.6, Theorem 1 ist S analytisch und daher universell meßbar.

Zum Beweis der Implikation "(i) $\Rightarrow$ (ii)" vergleiche man [20].

Der nun folgende Beweis der Implikation "(ii) $\Rightarrow$ (i)" unterscheidet sich von dem in [20] angegebenen. Dort wird anstelle von Satz 2 ein Lemma von Hoffmann-Jørgensen benutzt.

Beweis von "(ii) $\Rightarrow$ (i)" :

Wir zeigen zunächst, daß es μ -meßbare Abbildungen g und h von Y in X gibt, sodaß $f(g(y)) = y = f(h(y))$ für alle $y \in Y$, und $g(y) \neq h(y)$ für alle $y \in S$ gilt.

Nach Korollar 3 gibt es eine universell meßbare Abbildung $g : Y \rightarrow X$, sodaß $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$ gilt. Diese Abbildung ist μ -Lusin-meßbar (vgl. [14], IV.1 Thm. 1 und IV.2 Thm. 7), also existiert eine aufsteigende Folge (K_n) kompakter Teilmengen von Y , sodaß $g|_{K_n}$ für jedes n stetig ist und $Y \setminus \bigcup_n K_n$ eine μ -Nullmenge ist.

$B := \bigcup_n K_n$ ist eine Borel-Menge, also auch analytisch und der Graph G von $g|_B$ ist eine F_σ -Teilmenge von $Y \times X$. Also ist $H := (Y \times X) \setminus G$ eine Borel-Teilmenge des analytischen Raumes $Y \times X$ und daher selbst analytisch.

Schließlich erhält man wie im Beweis von Kor. 3, daß die Korrespondenz

$\Phi := \{(y, x) \in Y \times X : f(x) = y\}$ zwischen Y und X analytisch ist.

Daraus folgt, daß $(\Phi \cap H) \cap ((B \cap S) \times X)$ eine analytische Korrespondenz zwischen den analytischen Räumen $B \cap S$ und Y ist, und daher nach Satz 2 einen universell meßbaren Schnitt h' besitzt.

Definiert man nun eine Abbildung $h: Y \rightarrow X$ durch

$$h(y) := \begin{cases} h'(y) & \text{für } y \in B \cap S \\ g(y) & \text{für } y \in Y \setminus S \\ \text{beliebig aus } f^{-1}(y) \setminus \{g(y)\} & \text{für } y \in S \setminus B \end{cases},$$

so leisten g und h das Verlangte.

Seien nun g und h zwei derartige Abbildungen. Da X analytisch ist, existiert eine injektive, Borel-meßbare Abbildung $r: X \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. [14], III.2 Thm. 3). $r \circ g$ und $r \circ h$ sind daher μ -meßbare, reelle Funktionen auf Y , und daher sind die Mengen $B' := \{y \in Y : r(h(y)) < r(g(y))\}$ und $C' := \{y \in Y : r(h(y)) > r(g(y))\}$ μ -meßbar. Da r injektiv ist, gilt weiterhin $S \subseteq B' \cup C'$.

Sei nun N eine μ -Nullmenge, sodaß $B := B' \setminus N$ eine Borel-Menge ist.

Da $f \circ g(\mu) = \mu = f \circ h(\mu)$ gilt, sind $g(\mu)$ und $h(\mu)$ nach Voraussetzung gleich. Also folgt:

$$\int_{f^{-1}(B)} r \, d(g(\mu)) = \int_{f^{-1}(B)} r \, d(h(\mu))$$

Und weiter:

$$\begin{aligned} \int_B (r \circ g) \, d\mu &= \int_{(f \circ g)^{-1}(B)} (r \circ g) \, d\mu = \int_{f^{-1}(B)} r \, d(g(\mu)) = \\ &= \int_{f^{-1}(B)} r \, d(h(\mu)) = \int_B (r \circ h) \, d\mu. \end{aligned}$$

$$\text{Also gilt } \int_B (r \circ g - r \circ h) \, d\mu = 0.$$

Da $(r \circ g - r \circ h)$ auf B strikt positiv ist, folgt daraus $\mu(B) = 0$.

B' ist daher eine μ -Nullmenge.

Ebenso erhält man, daß C' eine μ -Nullmenge ist.

Damit ist wegen $S \subseteq B' \cup C'$ auch S eine μ -Nullmenge.

Literaturverzeichnis

- [1] R.J. Aumann : Measurable utility and the measurable choice theorem,
 Coll. Int. du Centre National du Recherche Scientifique
 La Decision, Aix en Provence, 1967, pp. 15 - 26
- [2] H. Bauer, H.S. Bear : The part metric in convex sets, Pacific Journ.
 of Math. 30 (1969) 15 - 33
- [3] K. Borsuk : Über Isomorphie der Funktionenräume, Bull. Int. Acad.
 Polon. 1933, 1 - 10
- [4] N. Bourbaki : Topologie générale, Chap. 1 à 4, Hermann, Paris 1971
- [5] ----- Topologie générale, Chap. 5 à 10, Hermann, Paris 1974
- [6] Ch. Castaing : Le théorème du Dunford-Pettis généralisé, Séminaire
 P. Lelong, 9^e année 1968/69, Lecture Notes in Math.,
 Vol. 116, pp. 133 - 151, Springer, Berlin etc. 1970
- [7] A. Clausing, G. Mägerl : Generalized Dirichlet problems and continu-
 ous selections of representing measures, Math. Anna-
 len 216 (1975) 71 - 78
- [8] H.H. Corson, J. Lindenstrauss : Continuous selections with nonmetri-
 zable range, Trans. A.M.S. 121 (1966) 492 - 504
- [9] J. Dugundji : An extension of Tietzes theorem, Pacific Journ. of Math.
 1 (1951) 353 - 367
- [10] ----- Topology, 6th printing, Allyn and Bacon, Boston 1970
- [11] K.-Th. Eisele : On the uniqueness of preimages of measures, in:
 Measure Theory, Proc. of the Conference Held at Ober-
 wolfach (A. Bellow, D. Kölzow eds.), Lecture Notes
 in Math., Vol. 541, pp. 5 - 12, Springer, Berlin etc.
 1976

- [12] C.J. Himmelberg, F.S. van Vleck : Selection and implicit function theorems for multifunctions with Souslin graph, Bull. Acad. Polon. 19 (1971) 911 - 916
- [13] F. Hirzebruch, W. Scharlau : Einführung in die Funktionalanalysis, BI-Hochschultaschenbücher, Bd. 296 a, Bibliographisches Institut, Mannheim 1971
- [14] J. Hoffmann-Jørgensen : The Theory of Analytic Spaces, Matematisk Inst. Various Publ. Ser. No. 10, Aarhus 1970
- [15] R. Jamison : A general theory of convexity, Ph.D. Thesis, Univ. of Washington, Seattle 1974
- [16] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski : A general theorem on selectors, Bull. Acad. Polon. 13 (1965) 397 - 403
- [17] D. Landers, L. Rogge : On the extension problem for measures, Zeitschr. Wahrsch.-Theorie 30 (1974) 167 - 169
- [18] S.J. Leese : Multifunctions of Souslin type, Bull. Austral. Math. Soc. 11 (1974) 395 - 412
Corrections, ibidem 13 (1975) 154
- [19] Ch. Leger : Filtres lents et espaces hypercomplets, Séminaire Choquet, 4^e année 1964/65, exp. n^o 9
- [20] J. Lehn, G. Mägerl : On the uniqueness of preimage measures, eingereicht bei Zeitschr. Wahrsch.-Theorie
- [21] A. Lubin : Extensions of measures and the von Neumann selection theorem, Proc. A.M.S. 43 (1974) 118 - 122
- [22] G. Mägerl : Stetige und meßbare Schnitte für Korrespondenzen, Diplomarbeit, Erlangen 1973
- [23] ----- : Some theorems on measurable and continuous selections and some applications, in Proc. of the 4th Winter School on Abstract Analysis, pp. 113 - 117, Math. Inst. Czech. Acad. Sci., Praha 1976

- [24] E.A. Michael : Topologies on spaces of subsets, Trans. A.M.S.
71 (1951) 152 - 182
- [25] ----- Some extension theorems for continuous functions,
Pacific Journ. Math. 3 (1953) 789 - 806
- [26] ----- Continuous selections I, Ann. of Math. 63 (1956)
361 - 382
- [27] ----- Selected selection theorems, Amer. Math. Monthly
63 (1956) 233 - 238
- [28] ----- A linear mapping between function spaces, Proc.
A.M.S. 15 (1964) 407 - 409
- [29] ----- A selection theorem, Proc. A.M.S. 17 (1966)
1404 - 1407
- [30] T. Parthasarathy : Selection theorems and their applications, Lecture
Notes in Math. Vol. 263, Springer, Berlin etc. 1972
- [31] M.F. Sainte Beuve : On the extension of von Neumann - Aumann
theorem, Journ. Funct. Anal. 17 (1974) 112 - 124
- [32] H.H. Schaefer : Topological Vector Spaces, 3rd printing, Springer,
Berlin etc. 1971
- [33] A.H. Stone : A note on paracompactness and normality of mapping
spaces, Proc. A.M.S. 14 (1963) 81 - 83
- [34] J. von Neumann : On rings of operators. Reduction theory, Ann. of
Math. 50 (1949) 401 - 485
- [35] H. von Weizsäcker : Some negative results in the theory of lifting,
in Measure Theory, Proc. of the Conf. Held at Ober-
wolfach (A. Bellow, D. Kölzow eds.), Lecture Notes
in Math. Vol. 541, pp. 159 - 172, Springer, Berlin etc.
1976
- [36] M.P. Yershov (Ershov) : Extensions of measures and stochastic
equations, Theor. Prob. Appl. 19 (1974) 431 - 444

Lebenslauf

Ich wurde am 30. Dezember 1948 als zweiter Sohn des kaufmännischen Angestellten Ferdinand Mägerl und seiner Ehefrau Kreszenz in Passau geboren.

Von September 1955 bis Juli 1959 besuchte ich in Nürnberg die Volksschule und trat anschließend im Franziskanerseminar Freystadt/Oberpfalz in die erste Klasse des Humanistischen Gymnasiums ein.

Im Januar 1960 wurde ich in das Neue Gymnasium Nürnberg aufgenommen, wo ich auch im Juli 1968 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1968/69 begann ich mit dem Studienziel Lehramt an den Gymnasien an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg mit dem Studium der Mathematik und Physik und legte an derselben Universität im Herbst 1970 die Vorprüfung in Mathematik und Physik, sowie im Oktober 1971 die Prüfung in Philosophie ab.

Im Wintersemester 1972/73 wechselte ich das Studienfach und studierte von da ab Mathematik mit dem Studienziel Diplom.

Im Mai 1973 bestand ich dann in Erlangen die Diplomprüfung in Mathematik.

Während meines Studiums hörte ich Vorlesungen der Herren Professoren Bauer, Jacobs und Kölzow in Mathematik und der Herren Professoren Fleischmann und Huber in Physik.

Im Juni 1973 wurde ich mit der Verwaltung einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut in Erlangen betraut.

Am 2. November 1973 heiratete ich die Studentin Irmgard Leppert.

Am 16. Mai 1974 wurde ich zum Grundwehrdienst einberufen und von der Universität Erlangen-Nürnberg beurlaubt. Seit meiner Entlassung vom Wehrdienst am 15. August 1975 übe ich meine frühere Tätigkeit als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut in Erlangen wieder aus.

Während dieser Zeit stellte ich auch unter der Anleitung von Herrn Professor Dr. Kölzow meine Dissertation fertig.

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197